KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

CIĄGI LICZBOWE

REALIZACJA METODĄ PROJEKTU

opracował dr Bronisław Pabich

pabich@interklasa.pl

www.pabich.interklasa.pl

- Definicja ciągu liczbowego
- Sposoby określania ciągów liczbowych
- Sposoby prezentacji ciągów liczbowych
- Monotoniczność ciągów
- Prezentacja ciągów w arkuszu Excel
- Wykresy ciągów w arkuszu Excel
- Prezentacja ciągów w Geogebrze
- Ciąg arytmetyczny
- Ciąg geometryczny

DEFINICJA CIĄGU LICZBOWEGO

Ciągiem liczbowym* nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych**, czyli ***przyporządkowanie, w którym każdej liczbie naturalnej odpowiada dokładnie jedna liczba rzeczywista.

Np. jeżeli każdej liczbie naturalnej ***n*** przypiszemy liczbę, będącą jej odwrotnością, to otrzymamy ciąg:

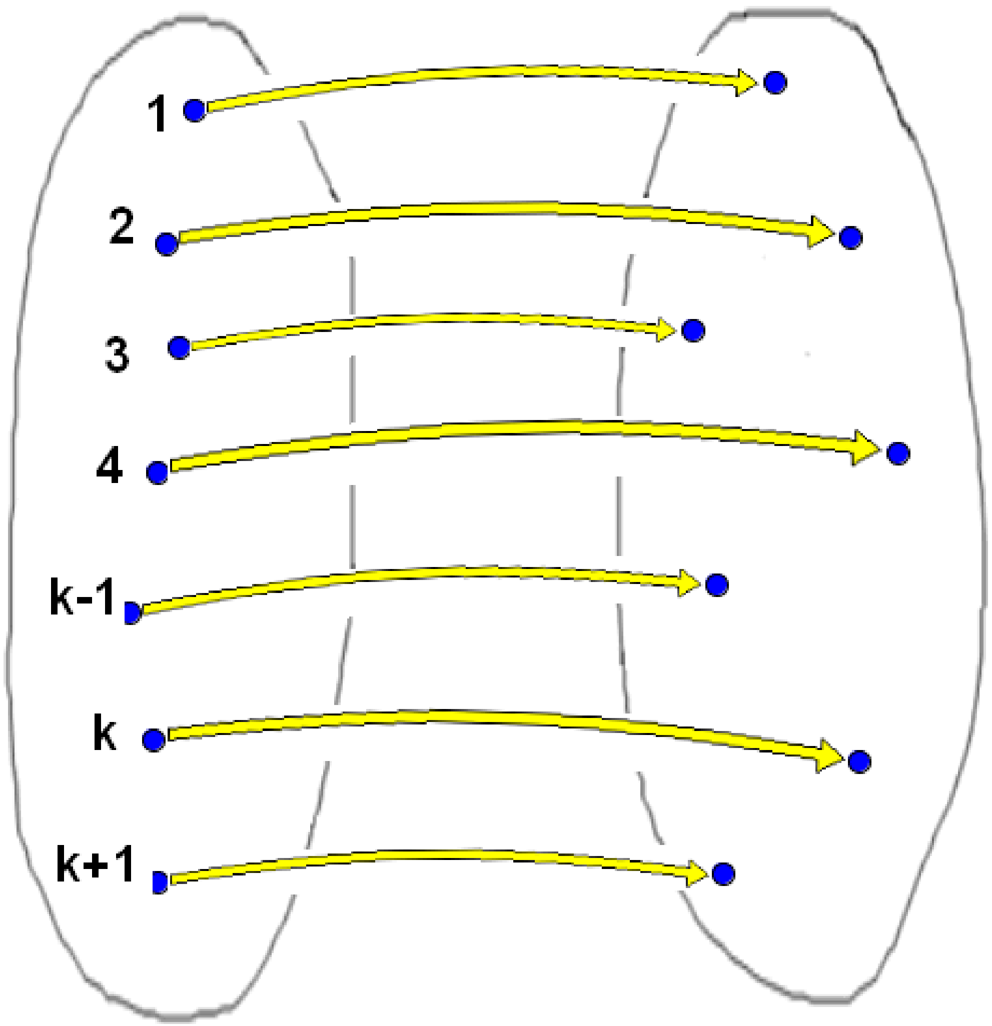
n = 1

$$n = 1 \qquad a_1 = \frac{1}{1} = 1$$

Zatem nasz ciąg ma postać ułamków:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots, \frac{1}{k-1}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \ldots\ldots$$

To przyporządkowanie możemy zilustrować poniższym grafem.



Ponieważ liczb naturalnych jest nieskończenie wiele, więc ciąg posiada nieskończenie wiele wartości. Mówimy, że ciąg jest ***nieskończony*.**

W zapisie:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots, \frac{1}{k-1}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \ldots\ldots$$

pojawiły się wyrazy: ***k-1***-szy (czytaj ***k*** minus pierwszy), ***k***-ty (czytaj ***k*** ty), i ***k+1***-szy, choć nie wiemy konkretnie, które to wyrazy. Wiemy natomiast, że są one kolejnymi wyrazami ciągu.

Jeżeli będziemy chcieli powiedzieć, że wszystkie wyrazy ciągu spełniają jakąś własność ***W***, (np.. Że wszystkie sa dodatnie) to wystarczy, gdy powiemy, że każdy ***k***-ty wyraz ciągu spełnia tę własność i zapiszemy:

$$\bigwedge_{k \in N} a_k \text{ spełnia własność } W$$

co czytamy: dla każdej liczby ***k*** naturalnej wyraz ***k***-ty $\boldsymbol{a_k}$ spełnia własność ***W***.

Symbol /\ oznacza dokładnie „dla każdego”

Przyporządkowanie liczbom naturalnym wartości ciągu (tak jak wartości funkcji) odbywa się według pewnej reguły, którą nazywamy ***wzorem ciągu*** (tak jak wzór funkcji).
W omówionym przykładzie wzór ten ma postać:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Wartość ciągu (podobnie jak wartość funkcji) dla konkretnej liczby naturalnej ***n*** nazywamy ***n-tym wyrazem ciągu*** i oznaczamy symbolem

$$\boldsymbol{a_n}$$

Można go wyznaczyć, wstawiając za ***n*** do wzoru ciągu konkretną liczbę naturalną.

Gdy chcemy na przykład obliczyć wyraz piąty, wstawiamy do wzoru liczbę ***n = 5***, gdy siódmy, liczbę ***n = 7***.

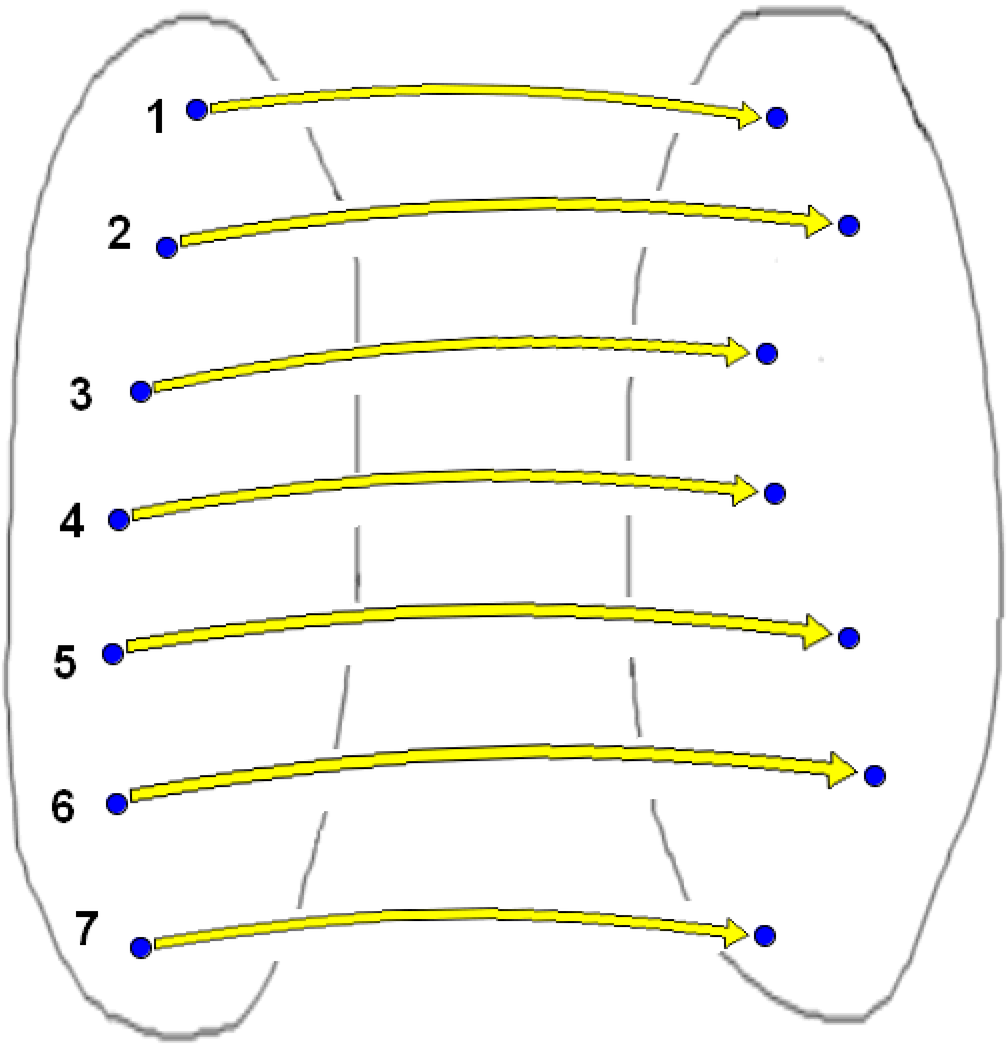
Dla ciągu zadanego wzorem $a_n = \frac{1}{n}$ otrzymamy wówczas

:

$$a_5 = \frac{1}{5} \quad , \qquad a_7 = \frac{1}{7}$$

Zajmijmy się innym ciągiem, zadanym wzorem:. $a_n = \frac{n}{n+1}$

Sprawdź na poniższej animacji, czy dobrze obliczono wartości siedmiu wyrazów tego ciągu.



Poniższa animacja ilustruje 47 kolejnych wyrazów tego ciągu:

$$n = 1 \qquad b_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

Obserwując ją możesz zauważyć, że wartości liczbowe wyrazów tego ciągu zbliżają się do pewnej liczby.

Odpowiedz na poniższe pytania:

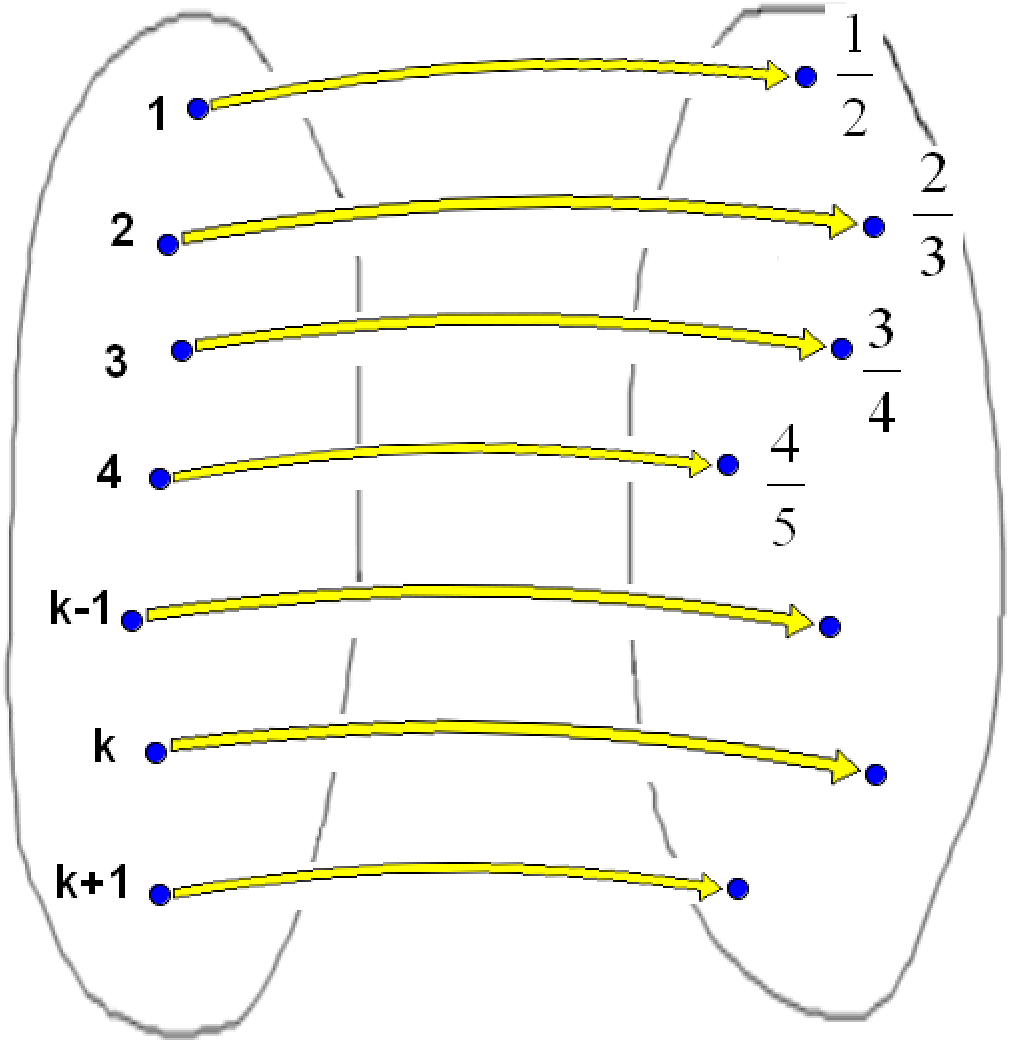
Co to za liczba?

Czy ciąg ten przyjmie kiedykolwiek wartość 1.5, 2.0, 7.0 ?

Jaką wartość przyjmuje k-1-szy, k-ty i k+1-szy

wyraz ciągu $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ***?***

Następny slajd ilustruje odpowiedź


1
2
3
4
k-1
k
k+1
$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{5}$

SPOSOBY OKREŚLANIA CIĄGÓW LICZBOWYCH

Ciągi można określać nie tylko wzorami, ale również innymi metodami.

1. **<u>przez opis słowny ciągu</u>** - opisujemy wówczas sposób tworzenia kolejnych wyrazów ciągu:

   np. określamy ciąg słowami:

   „***ciąg ostatnich cyfr kolejnych liczb parzystych***”.

   Wówczas nasz ciąg liczbowy to: ***2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, 8 ...***

Słowami możemy opisać również inny ciąg:

„***wybierz dowolną liczbę naturalną a. Jeśli jest ona parzysta, to następną liczbą ciągu będzie połowa tej liczby, czyli a/2, a gdy nieparzysta, to następną liczbą będzie liczba postaci 3a+1. Kolejne liczby tworzymy z poprzednich w ten sam sposób. Wyznacz ten ciąg.***”

Gdy zaczniemy od liczby ***13***, to otrzymamy kolejno: ***40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...***

Wyznacz następne wyrazy tego ciągu.

Czy za każdym razem uzyskujesz różne wartości liczbowe tego ciągu?

2.przy użyciu wzoru algebraicznego

Tę metodę stosowaliśmy już w trakcie określania ciągu. Zapamiętaj sobie, że wzór algebraiczny ciągu określa ***n***-ty wyraz ciągu. Wzór ten pozwala wyznaczyć każdy wyraz ciągu.

Czy ciąg określony w poprzednim przykładzie słowami: „***ciąg ostatnich cyfr kolejnych liczb parzystych***” da się określić wzorem algebraicznym?

To był ciąg: ***2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6…..***

Widać, że w tym ciągu powtarzają się te same liczby, ale nie potrafimy za pomocą żadnego wzoru ustalić, jaką wartość będzie miał na przykład sto dwudziesty wyraz tego ciągu. Można oczywiście do tego dojść innymi sposobami, ale ogólnego wzoru algebraicznego na taki ciąg nie wymyślimy.

Zauważ, że również trudno byłoby opisać wzorem drugi ciąg przedstawiony słowami:

„***wybierz dowolną liczbę naturalną a. Jeśli jest ona parzysta, to następną liczbą ciągu będzie połowa tej liczby, czyli a/2, a gdy nieparzysta, to następną liczbą będzie liczba postaci 3a+1. Kolejne liczby tworzymy w ten sam sposób. Wyznacz ten ciąg.***”

Wartość każdego wyrazu tego ciągu nie zależy od liczby „***n***” wskazującej numer tego wyrazu, lecz od wartości poprzedniego wyrazu, a ten znamy dopiero wtedy, gdy wiemy, jaki jest wyraz poprzedzający go….itd.

3. przy użyciu wzoru rekurencyjnego

Wyobraźmy sobie ciąg rozpoczynający się od liczby ***5***, w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie do niego liczby ***3***. Otrzymamy więc ciąg:

5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

Konstrukcję wyrazów tego ciągu można opisać krótko:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

Wzór
$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

określa wartość pierwszego wyrazu (jest on równy 5), oraz pokazuje sposób wyznaczenia dowolnego wyraz ciągu, gdy znamy jego poprzednik.

Gdy chcemy obliczyć wyraz 18-ty tego ciągu musimy znać wartość wyrazu 17-tego, a ten wyznaczymy, gdy znamy 16-ty, ... itd. aż wrócimy do wyrazu pierwszego, czyli do liczby 5.

Poszukując wartości dowolnego wyrazu ciągu zmuszeni jesteśmy do cofania się.

Stąd nazwa „***wzór rekurencyjny ciągu***” - *recursio (łac.)* = „*cofanie*”.

Które z ciągów w poprzednich przykładach można określić wzorami rekurencyjnymi?

Spróbujmy dla wzoru opisanego regułą rekurencyjną :

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

wyznaczyć ogólny wzór tego ciągu.

Przypatrzmy się dwudziestu kolejnym wyrazom tego ciągu:

$$n = 1 \qquad a_1 = 5$$

Czy na podstawie obserwacji tego ciągu można wyznaczyć wartość jego trzydziestego czwartego wyrazu?

Jeśli miałeś kłopoty z wyznaczeniem wzoru, to spróbujmy ten ciąg przedstawić nieco inaczej:

$n = 1$ $\quad a_1 = 5 + (1-1)*3 = 5$

***Czy teraz już wiesz, jaki jest wzór ogólny ciągu*:**

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 36, …..?

Jeśli dobrze obserwowałeś kolejne wyrazy ciągu zapisane takim sposobem:

$n = 1$ $\qquad a_1 = 5 + (1-1)*3 = 5$

to zauważyłeś, że trzy liczby w tym zapisie nigdy się nie zmieniają. Zatem ciąg ten można opisać ogólnym wzorem:

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3$$

Wypisanie wyrazów ciągu liczbowego, określanie go za pomocą wzoru algebraicznego, czy też rekurencyjnego nie jest tak ilustratywny, jak graficzna prezentacja ciągu.

Ponieważ ciąg liczbowy jest funkcją, więc istnieje możliwość stworzenia jego wykresu, podobnie jak to robi się dla funkcji.

Ponieważ dziedziną tej funkcji (ciągu) są liczby naturalne, więc wykres ciągu nie będzie krzywą, lecz figurą geometryczną składającą się z samych punktów, rozmieszczonych w układzie współrzędnych kartezjańskich.

Podobnie jak dla funkcji wykonywaliśmy ich wykresy, teraz będziemy wykonywać wykresy ciągów. Wykres ciągu jako funkcji określonej na zbiorze liczb naturalnych nie jest krzywą, lecz zbiorem nieskończenie wielu odizolowanych od siebie punktów.

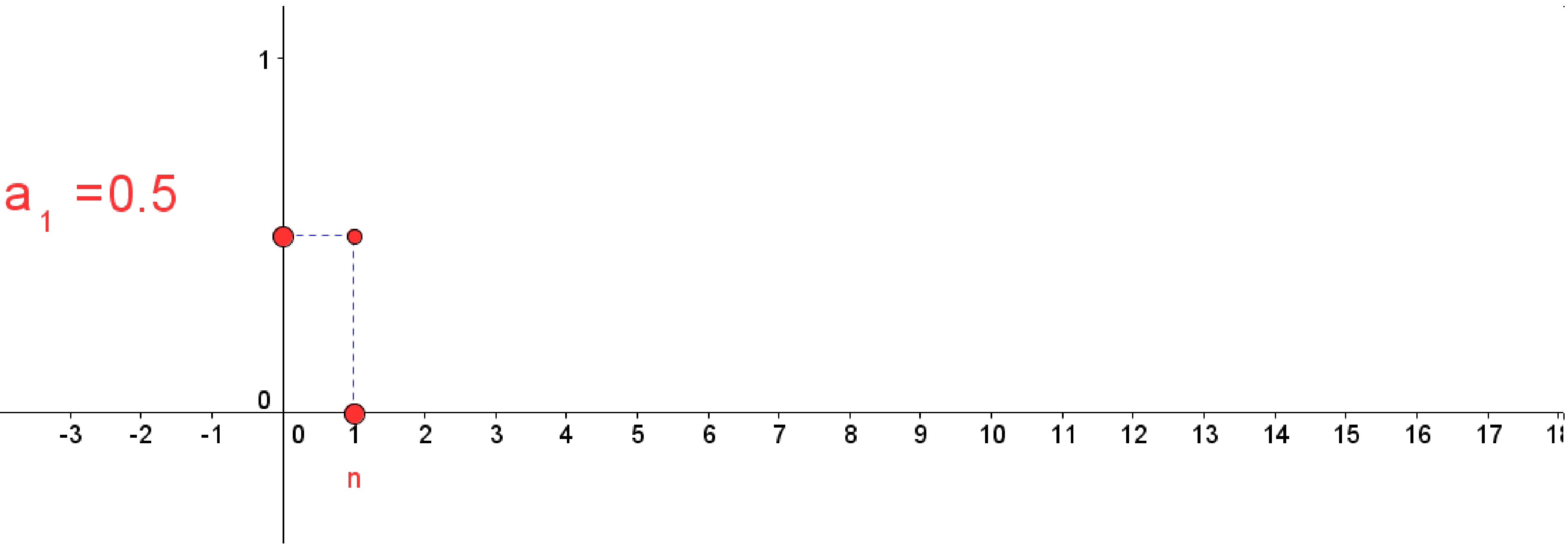
Są dwa sposoby graficznej prezentacji ciągów:

1. prezentacja graficzna w układzie współrzędnych

Na osi $\boldsymbol{x}$ zaznacza się liczby naturalne $\boldsymbol{n}$, a na osi $\boldsymbol{y}$ odpowiadające im wartości liczbowe ciągu $\boldsymbol{a_n}$. Punkty o tak wyznaczonych współrzędnych prezentują graficznie ciąg.

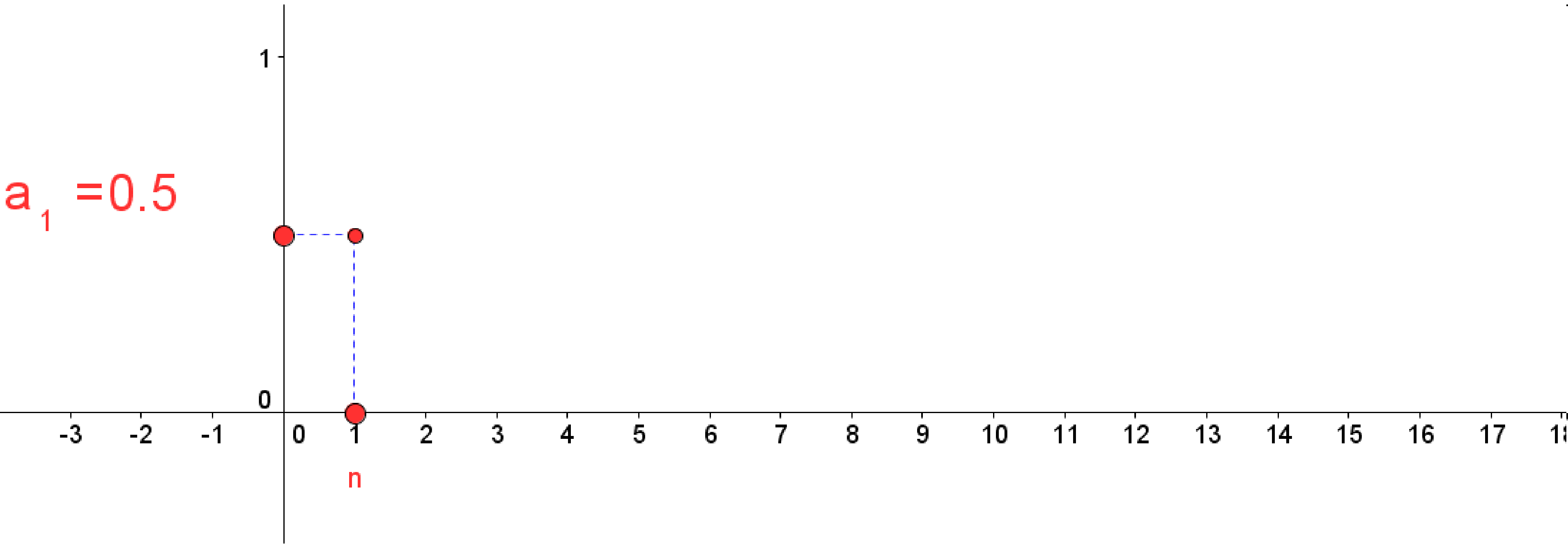
Poniżej przedstawiono wykres siedemnastu wyrazów ciągu o wzorze :

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$



Prezentacja graficzna ciągów pozwala dostrzec ich własności.

Obserwując wykres ciągu w układzie współrzędnych można zauważyć, że punkty „ilustrujące” jego wyrazy zbliżają się do prostej równoległej do osi ***n***, przechodzącej przez punkt ***(0,1)***.

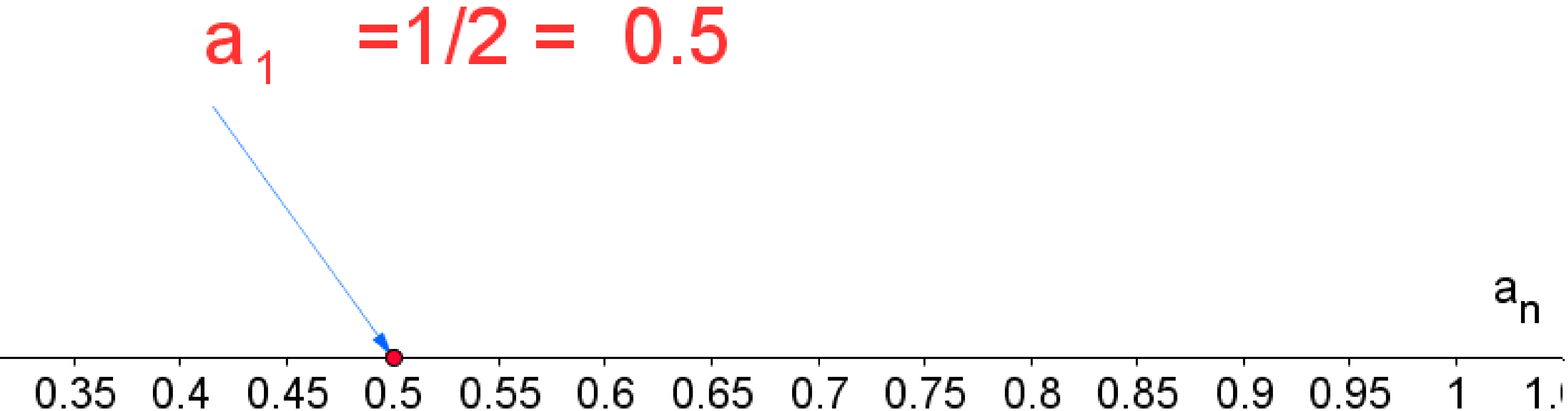


Ze wzoru wynika, że żaden z wyrazów tego ciągu nie osiągnie, ani nie przekroczy liczby 1, co oznaczałoby, że wyrazy rozważanego ciągu zbliżają się do niej „od dołu”.

2. prezentacja graficzna na osi liczbowej

W tej prezentacji wartości liczbowe ciągu są odciętymi punktów osi ***n***.

Ciąg ilustrują graficznie punkty tak, jak to jest zrobione na poniższej animacji.



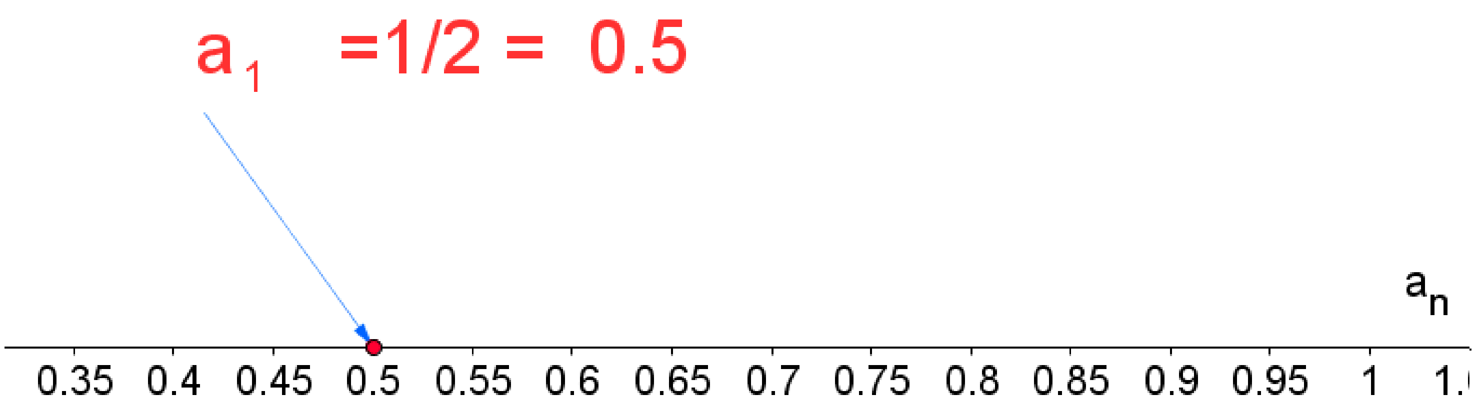
Na wykresie tym widać, że odległości między poszczególnymi punktami na osi liczbowej, ilustrującymi wyrazy ciągu zmniejszają się.

Bardzo blisko punktu o odciętej 1 zlewają się niemal ze sobą.

Oznacza to znowu, że wartość 1 jest wartością, do której zbliżają się wyrazy ciągu.

W obu przypadkach (jest to przecież ten sam ciąg), wyrazy te zbliżają się do liczby 1 od strony lewej (od strony ujemnej osi).

Umiejętność odczytywania takich własności ciągu z wykresu pozwoli w przyszłości lepiej zrozumieć trudniejsze pojęcia teorii ciągów.



Dzięki komputerom można oglądać, badać i odkrywać rozmaite własności ciągów.

Rysunek, który wykonujemy w zeszycie nie oddaje takich szczegółów, które dostrzegamy na ekranie komputera.

Obecnie można oglądać ilustracje komputerowe w sposób dynamiczny dzięki konstrukcjom wykonywanym w programach, zaliczanych do grupy programów geometrii dynamicznej.

Graficzne możliwości komputera ułatwiają dynamiczną prezentację wykresów ciągów, pod warunkiem, że nauczymy komputer wykonywać taką prezentację.

Służą do tego odpowiednie programy:

CABRI II Plus,

Geogebra

Excel

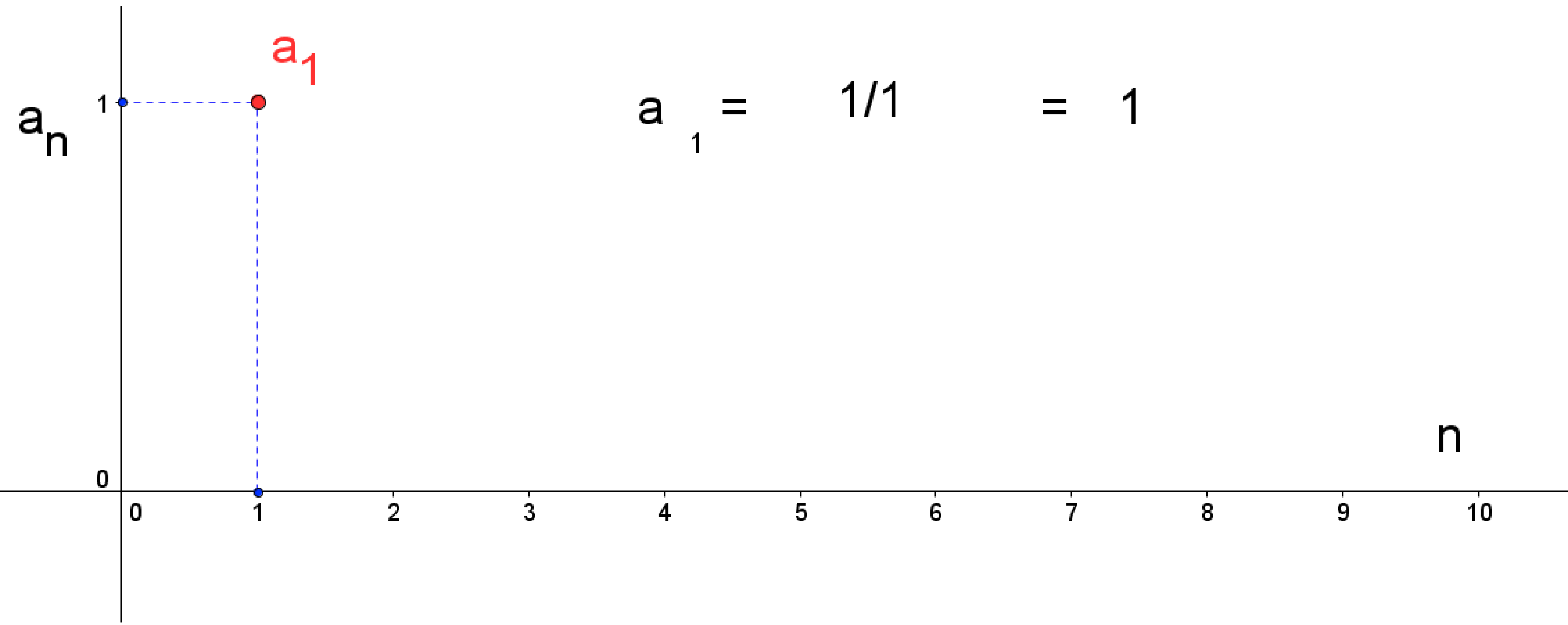
W kolejnych lekcjach poznasz metody tych prezentacji.

MONOTONICZNOŚĆ CIĄGÓW LICZBOWYCH

Zanim poznasz sposoby prezentacji graficznych ciągów, dowiedz się jakie ważne własności można odczytać z tych prezentacji.

Zacznijmy od ciągu, który już poznałeś: $a_n = \frac{1}{n}$

Oto jego wykres:



Jak zauważyłeś, każdy kolejny wyraz tego ciągu jest mniejszy od poprzedniego. Na wykresie objawia się to „spadkiem” jego wartości.

O takim ciągu powiemy, że jest ***malejący***.

Dla każdego ***n*** spełniony jest wówczas warunek: $a_n > a_{n+1}$

Co czytamy: każdy wyraz ciągu ma wartość większą od wartości wyrazu następnego po nim.

Zatem mamy definicję:

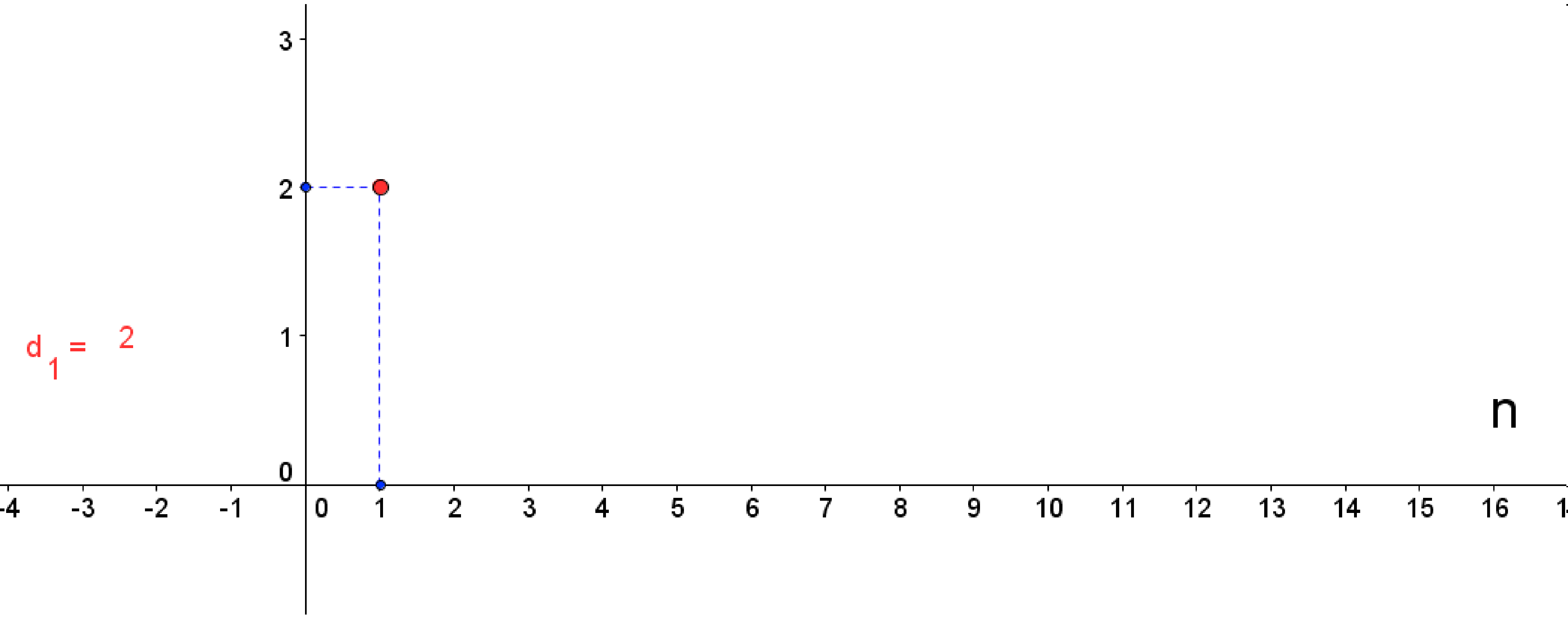
Ciąg liczbowy jest malejący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N} a_n > a_{n+1}$

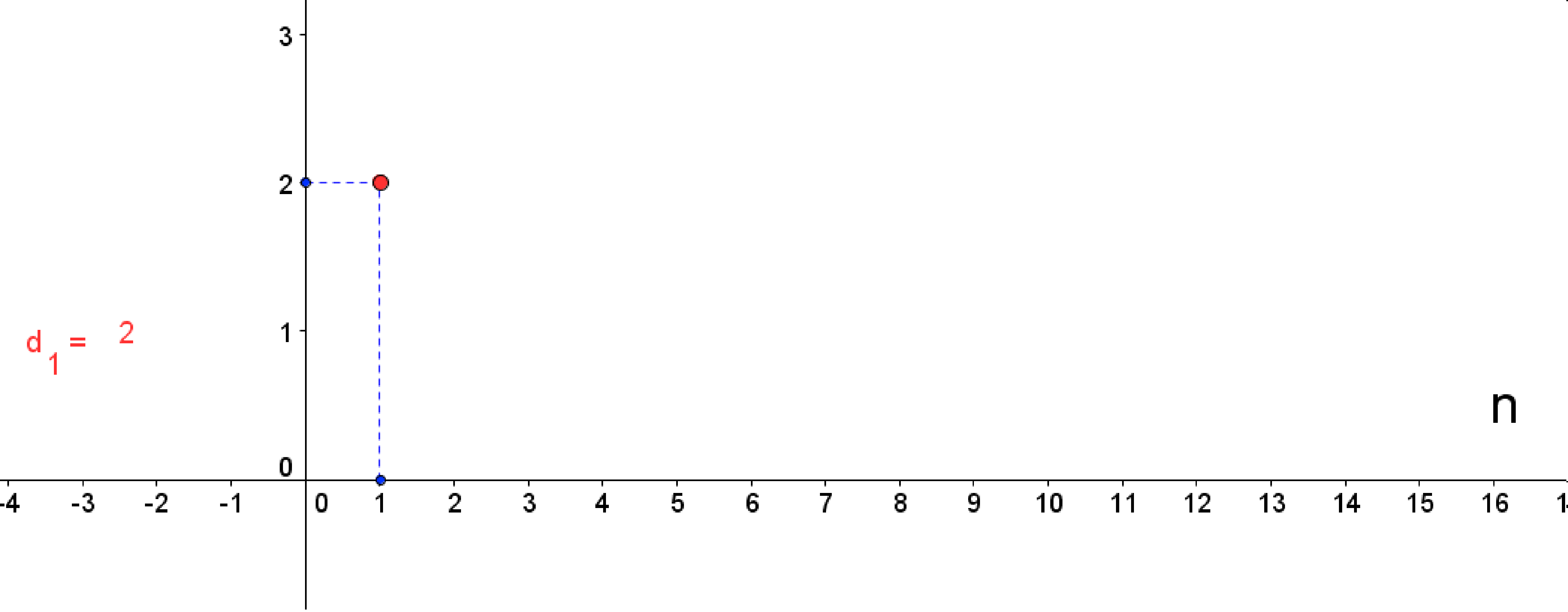
Inną własność ma ciąg: $d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Jego kolejne wyrazy bez przerwy wzrastają. Sprawdźmy to na poniższej prezentacji kilkunastu jego wyrazów.

$n = 1 \qquad d_1 = (1 + 1/1)^1 = 2$

Jeszcze lepiej widać to na wykresie tego ciągu, przedstawionego na poniższej animacji:





O takim ciągu powiemy, że jest ***rosnący***.

Dla wszystkich wartości ***n*** spełniony jest warunek: $d_n < d_{n+1}$

Zatem mamy kolejną definicję:

Ciąg liczbowy jest malejący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N} a_n < a_{n+1}$

Rozważmy kolejny przykład ciągu zadanego wzorem: ***$c_n = 2 \cdot (-1)^n$***

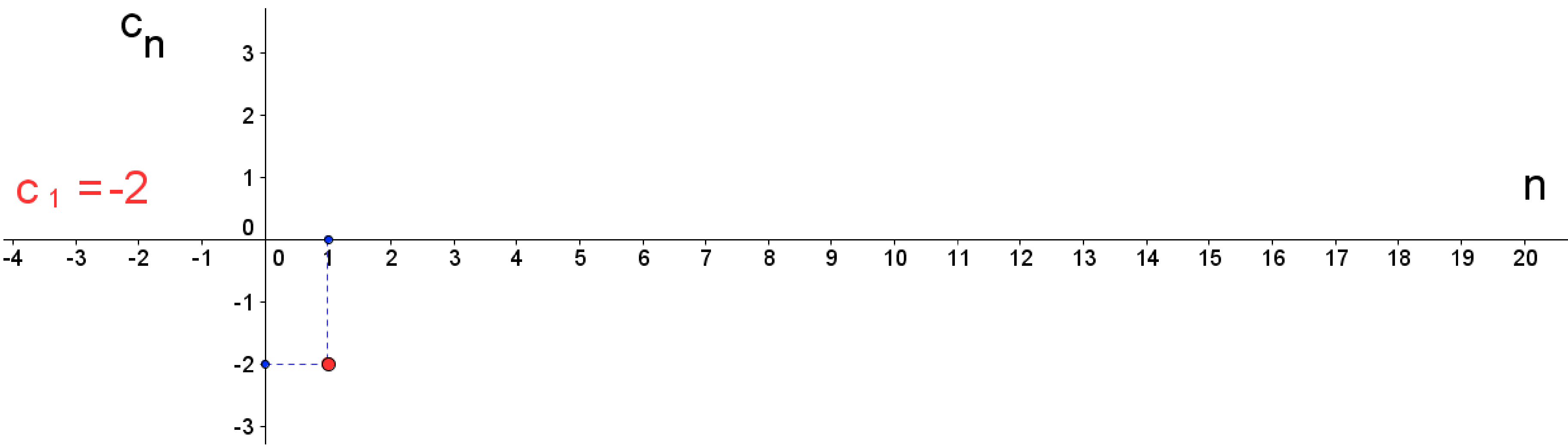
Oto jego kolejnych kilkanaście wyrazów:

$n = 1$ $\qquad$ $c_1 = 2(-1)^1 = -2$

Jak zauważyłeś jego wyrazy przybierają tylko dwie wartości, przy czym występują one na przemian -2, 2, -2, 2, -2, ….

O takim ciągu powiemy, że jest ***przemiennym*** (albo naprzemiennym).
Nie jest on ani rosnący, ani malejący.

Jego wykres balansuje raz w górę, raz w dół, co ilustruje poniższa animacja:



Ciąg który jest rosnący lub malejący nazywamy ***monotonicznym***

(*monos* = [gr] jednakowy, *tonika* [gr] = wzrastanie)

W naszych przykładach ciągami monotonicznymi były $\boldsymbol{a_n}$ oraz $\boldsymbol{b_n}$

Jeśli ciąg nie jest monotoniczny, to wcale nie oznacza, że musi być naprzemienny. Podział ciągów w tym temacie nie jest trichotomiczny. Rozważmy kolejny przykład:

ciąg o wzorze $$e_n = \frac{2-n}{n-5}$$

$n = 1 \quad e_1 = (2-1)/(1-5) = -0.25$

Czy zauważyłeś, jaki wynik ukazał się na ekranie dla n=5?
Za chwilę to będzie wyjaśnione.
Najpierw jednak oblicz, jaką wartość ma piąty wyraz ciągu e_n ?
Co … nie da się jej obliczyć?... Dlaczego?

Jak zauważyłeś, dla n=5 wartość ciągu nie istnieje, gdyż wówczas pojawia się dzielenie przez 0, które nie jest wykonalne. Komputer pokazuje wartość $-\infty$ (czytaj minus nieskończoność). Tej wartości nigdy nie osiągniemy, ale zbliżamy się do niej „granicznie”, gdy ułamek ma licznik ujemny a mianownik zbliża się do zera.

Powiemy, że w naszym przypadku $e(5) = \frac{-3}{0}$ zbliża się do $-\infty$

PREZENTACJA CIĄGÓW W ARKUSZU KALKULACYJNYM EXCEL

Programem nadającym się do badania ciągów jest każdy arkusz kalkulacyjny do którego dołączony jest program generujący wykresy.

Takie arkusze nadają się również do interpretacji i badania danych statystycznych. Z uwagi na polskojęzyczność najlepiej nadającym się do tego jest ogólnie dostępny program Microsoft Excel.

Z arkuszem Excel spotkałeś się pewnie już w gimnazjum, ale tam nie rysowałeś ciągów. Ponieważ ciąg jest funkcją, więc jego wykres kreuje się bardzo podobnie.

Przypomnijmy:
Arkusz kalkulacyjny Excel jest zbiorem komórek adresowanych podobnie, jak współrzędne punktów w układzie kartezjańskim.
Do komórek tych wprowadzamy dane liczbowe, daty, teksty oraz funkcje matematyczne, statystyczne i ekonomiczne.
Działania na tych danych wykonujemy, działając na adresach komórek.

Przypomnijmy: w celu wprowadzenia do arkusza kalkulacyjnego Excel ciągu $a_n = \frac{n}{n+1}$ wpisujemy do komórki **B2** regułę: ***= A2/(A2+1)***

	A	B	C	D
1	*n*	*n/(n+1)*		
2	*1*	0,500000000000000000000000000000		
3	*2*	0,666666666666667000000000000000		
4	*3*	0,750000000000000000000000000000		
5	*4*	0,800000000000000000000000000000		
6	*5*	0,833333333333333000000000000000		
7	*6*	0,857142857142857000000000000000		
8	*7*	0,875000000000000000000000000000		
9	*8*	0,888888888888889000000000000000		
10	*9*	0,900000000000000000000000000000		
11	*10*	0,909090909090909000000000000000		
12	*11*	0,916666666666667000000000000000		
13	*12*	0,923076923076923000000000000000		
14	*13*	0,928571428571429000000000000000		
15	*14*	0,933333333333333000000000000000		
16	*15*	0,937500000000000000000000000000		
17	*16*	0,941176470588235000000000000000		
18	*17*	0,944444444444444000000000000000		
19	*18*	0,947368421052632000000000000000		
20	*19*	0,950000000000000000000000000000		
21	*20*	0,952380952380952000000000000000		
22	*21*	0,954545454545455000000000000000		
23	*22*	0,956521739130435000000000000000		
24	*23*	0,958333333333333000000000000000		
25	*24*	0,960000000000000000000000000000		

= A2 /(A2 +1)

Kolejnym ciągiem, który wprowadzimy do Excela jest ciąg, który wymyślił w XIII wieku jeden z niewielu matematyków Średniowiecza, Włoch z Pizy ***Leonardo Fibonacci (1175-1250)*** . Obserwował on przyrodę
i poszukiwał w niej zależności matematycznych. Ciąg ten powstał w wyniku badań cyklu rozmnażania się pary królików.
Pierwsze dwa wyrazy tego ciągu przyjmują wartości 1, kolejne zaś powstają w myśl reguły: ***każdy kolejny wyraz ciągu jest sumą dwóch poprzednich wyrazów tego ciągu***.

Oto ciąg Fibonacciego:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2$

$a_4 = 3$

$a_5 = 5$

………

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Wyrazy tego ciągu wprowadzamy do arkusza Excel wpisując w dwie pierwsze komórki ***B2*** i ***B3*** wartości 1, a do kolejnej komórki ***B4*** wpisujemy regułę: ***= B2 + B3***

Następnie kopiujemy komórkę ***B4*** do pozostałych komórek kolumny ***B***.

Wyrazy ciągu Fibonacciego to liczby:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ….

	A	B
1	*n*	*f(n)*
2	*1*	1
3	*2*	1
4	*3*	2
5	*4*	3
6	*5*	5
7	*6*	8
8	*7*	13
9	*8*	21
10	*9*	34
11	*10*	55
12	*11*	89
13	*12*	144
14	*13*	233
15	*14*	377
16	*15*	610
17	*16*	987
18	*17*	1597
19	*18*	2584
20	*19*	4181
21	*20*	6765
22	*21*	10946
23	*22*	17711
24	*23*	28657
25	*24*	46368

= B2 + B3

Utwórz teraz nowy ciąg ***c_n*** którego każdy wyraz jest ilorazem ***n-tego*** wyrazu ***f_n*** ciągu Fibonacciego przez wyraz poprzedzający go (***n-1 – szy***).

Czyli do komórki ***C3*** wpisujemy regułę:

= B3 / B2

	A	B	C	D
1	*n*	*f(n)*	*f(n) / f(n-1)*	
2	*1*	1		
3	*2*	1	1,000000000000000000000000000000	
4	*3*	2	2,000000000000000000000000000000	
5	*4*	3	1,500000000000000000000000000000	
6	*5*	5	1,666666666666670000000000000000	***= B3 / B2***
7	*6*	8	1,600000000000000000000000000000	
8	*7*	13	1,625000000000000000000000000000	
9	*8*	21	1,615384615384620000000000000000	
10	*9*	34	1,619047619047620000000000000000	
11	*10*	55	1,617647058823530000000000000000	
12	*11*	89	1,618181818181820000000000000000	
13	*12*	144	1,617977528089890000000000000000	
14	*13*	233	1,618055555555560000000000000000	
15	*14*	377	1,618025751072960000000000000000	
16	*15*	610	1,618037135278510000000000000000	
17	*16*	987	1,618032786885250000000000000000	
18	*17*	1597	1,618034447821680000000000000000	
19	*18*	2584	1,618033813400130000000000000000	
20	*19*	4181	1,618034055727550000000000000000	
21	*20*	6765	1,618033963166710000000000000000	
22	*21*	10946	1,618033998521800000000000000000	
23	*22*	17711	1,618033985017360000000000000000	
24	*23*	28657	1,618033990175600000000000000000	
25	*24*	46368	1,618033988205320000000000000000	

Jak widać, kolejne wyrazy tego ciągu zbliżają się do pewnej liczby, która jest bliska wartości ***1,6180339… .***

	A	B	C
1	*n*	*f(n)*	*f(n) / f(n-1)*
2	*1*	1	
3	*2*	1	1,000000000000000000000000000000
4	*3*	2	2,000000000000000000000000000000
5	*4*	3	1,500000000000000000000000000000
6	*5*	5	1,666666666666670000000000000000
7	*6*	8	1,600000000000000000000000000000
8	*7*	13	1,625000000000000000000000000000
9	*8*	21	1,615384615384620000000000000000
10	*9*	34	1,619047619047620000000000000000
11	*10*	55	1,617647058823530000000000000000
12	*11*	89	1,618181818181820000000000000000
13	*12*	144	1,617977528089890000000000000000
14	*13*	233	1,618055555555560000000000000000
15	*14*	377	1,618025751072960000000000000000
16	*15*	610	1,618037135278510000000000000000
17	*16*	987	1,618032786885250000000000000000
18	*17*	1597	1,618034447821680000000000000000
19	*18*	2584	1,618033813400130000000000000000
20	*19*	4181	1,618034055727550000000000000000
21	*20*	6765	1,618033963166710000000000000000
22	*21*	10946	1,618033998521800000000000000000
23	*22*	17711	1,618033985017360000000000000000
24	*23*	28657	1,618033990175600000000000000000
25	*24*	46368	1,618033988205320000000000000000

= B3 / B2

Liczba ta znana już była w Starożytności i nosi nazwę ***złotej liczby***. Jeżeli interesuje Cię złota liczba, poszukaj w Internecie informację o niej lub zakup na stronie www.math-comp-educ.pl publikację ”Złota liczba z Cabri” autorstwa Bronisława Pabicha

Wykorzystajmy skonstruowany ciąg do kolejnego eksperymentu. ***Zastąpmy pierwsze dwa wyrazy ciągu Fibonacciego dowolnymi, niekoniecznie dodatnimi i dowolnie wielkimi liczbami.***

Obserwuj zachowanie się ciągu utworzonego w kolumnie ***C***.
Czy zmieniła się dostrzeżona wcześniej własność?
Czy ten ciąg również zbliża się do złotej liczby?
Czy odkryta własność zmieni się, gdy pierwsze dwie liczby zastąpimy innymi liczbami?
Powtórz kilkakrotnie ten eksperyment.

Trzecim ciągiem jest ciąg wymyślony w 1937 roku przez niemieckiego matematyka ***Lothara Collatza (1910-1990)***.

Ciąg ten definiujemy następująco:
Pierwszy wyraz ciąg jest dowolnie wybraną liczbą całkowitą.
Jeśli ta liczba jest liczbą parzystą, wówczas drugi wyraz powstaje z pierwszego przez podzielenie go przez 2,
jeśli natomiast jest nieparzystą, to mnożymy ją przez 3 i dodajemy 1.

Dla przykładu, gdy rozpoczniemy od liczby ***13*** to otrzymamy kolejno:

40, 20 ,10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 , 4, 2, 1, 4, 2, 1 , …..itd..

A co się stanie, gdy zamiast liczby 13 wybierzesz inną liczbę?
Wykonaj kilka prób rozpoczynając o dowolnej dowolnej liczby
i sformułuj odkrytą własność ciągu Collatza.

Spróbujmy wprowadzić ten ciąg do arkusza Excela.

Ustalmy wyraz pierwszy ciągu na przykład $a_1 = A$.

Aby utworzyć kolejny wyraz ciągu Collatza, komputer musi sprawdzić, czy ta liczba jest parzysta, czy nieparzysta.

Gdy liczba ***A*** jest nieparzysta, wówczas dzieląc tę liczbę przez 2 otrzymujemy resztę. To oznacza, że część całkowita ilorazu tej liczby przez 2 nie jest równa ilorazowi tej liczby przez 2.

Na przykład, jeśli ***A = 13***, wówczas część całkowita ilorazu 13 : 2 wynosi 6, a iloraz 13 : 2 = 6.5.
Zatem 6 ≠ 6.5

Gdy natomiast liczba ***A*** jest parzysta, to część całkowita ilorazu tej liczby przez 2 jest równa ilorazowi tej liczby przez 2.

Na przykład, jeśli liczba ***A = 14***, wówczas część całkowita ilorazu 14 : 2 wynosi 7, a iloraz 14 : 2 również wynosi 7.

Te spostrzeżenia podpowiadają, jak wprowadzić ciąg Collatza do arkusza Excela.

Pojęcie „część całkowita" jest w Excelu wprowadzona jako funkcja:

Zaokr.do.całk

po której wpisujemy w nawiasie interesujący nas iloraz.

Tak więc, jeśli chcemy sprawdzić, czy liczba w komórce ***B2*** jest parzysta, czy nie, wpisujemy do tej komórki regułę:

Zaokr.do.całk(B2/2)=B2/2

Ponieważ program Excel ma sam zdecydować, co wpisać do następnej komórki w tej samej kolumnie, więc wprowadzamy ***regułę warunkową***, która określi, co się ma stać, gdy liczba w komórce ***B2*** była parzysta, a co, gdy nieparzysta.

Oto reguła wpisana do komórki ***B3***:

=Jeżeli(Zaokr.do.całk(B2/2)=B2/2;B2/2;B2*3+1)

Czyli: jeśli ***B2/2*** jest parzysta (reszta z dzielenie jest równa ilorazowi), to w komórce ***B3*** ma być wpisana liczba ***B2/2***, a jeśli nie, to do komórki ***B3*** wpisujemy liczbę ***B2·3 + 1***.

Popatrzmy, co uzyskamy w wyniku zastosowania tego zabiegu.

Wystarczy wpisać do komórki regułę:

=Jeżeli(Zaokr.do.całk(B2/2)=B2/2;B2/2;B2*3+1)

i skopiować tę regułę do pozostałych komórek.

	A	B
1	*n*	*COLLATZ*
2	*1*	13
3	*2*	40
4	*3*	20
5	*4*	10
6	*5*	5
7	*6*	16
8	*7*	8
9	*8*	4
10	*9*	2
11	*10*	1
12	*11*	4
13	*12*	2
14	*13*	1
15	*14*	4
16	*15*	2
17	*16*	1
18	*17*	4
19	*18*	2
20	*19*	1
21	*20*	4
22	*21*	2
23	*22*	1
24	*23*	4
25	*24*	2

=JEŻELI((ZAOKR.DO.CAŁK(B2/2)=B2/2); B2/2; B2*3+1))

Ciąg Collatza nazywa się współcześnie problemem ***HOTPO***

od słów angielskich ***Half Or Triple Plus One*** – wyszukaj to pojęcie w Internecie i doczytaj inne ciekawostki na ten temat.

Łatwo zauważyć, że niezależnie od wyboru pierwszej liczby wyrazy tego ciągu powtarzają od pewnego momentu sekwencję:

4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, ……..

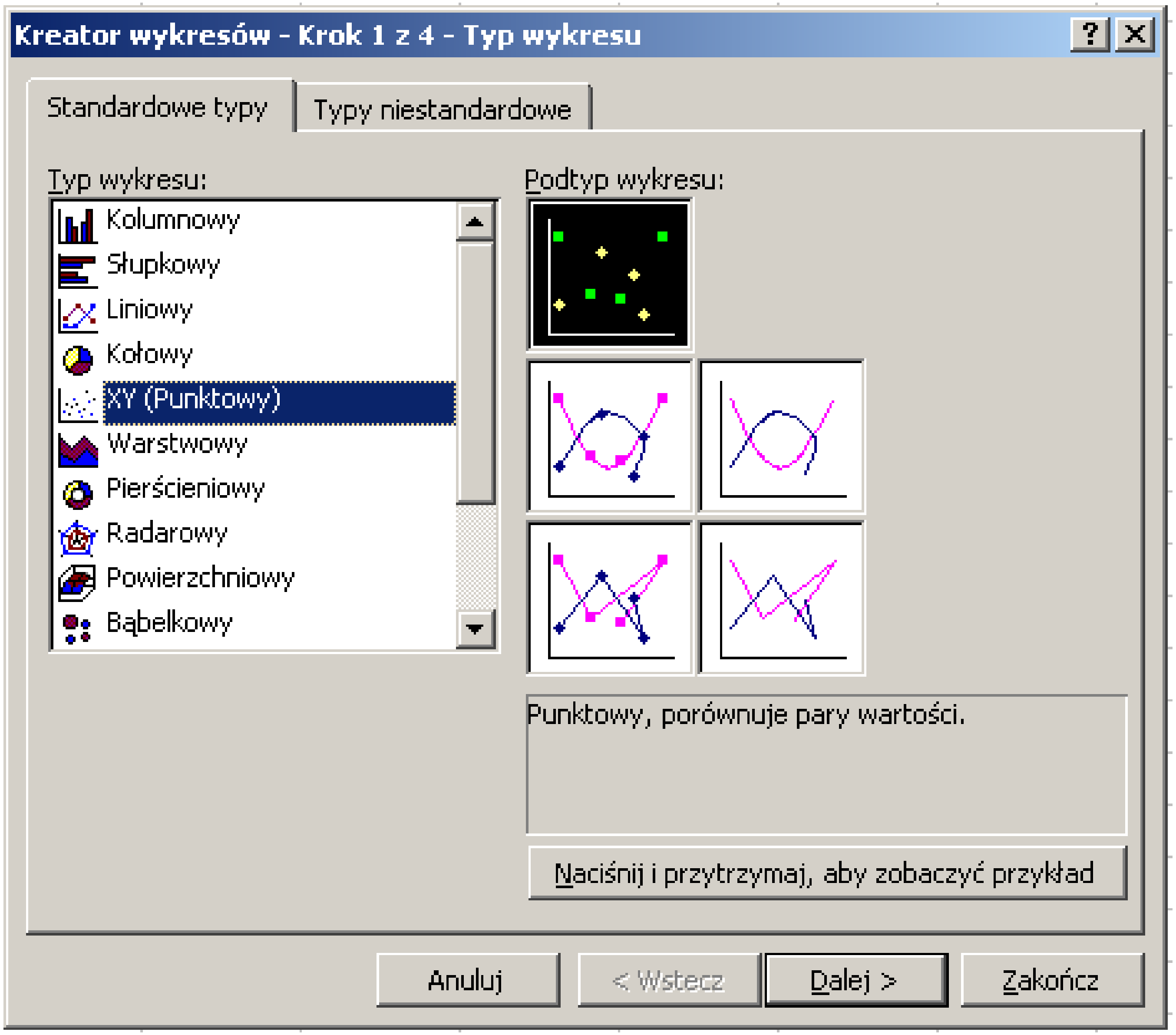
Węgierski matematyk Paul Erdős powiedział w latach pięćdziesiątych ub. stulecia, że matematyka jeszcze nie dorosła do dowodu tego twierdzenia i zaoferował 500 dolarów nagrody dla jego autora. Do dziś dnia nikt nie udowodnił tego twierdzenia. Nagroda pewnie jest już wyższa.

WYKRESY
CIĄGÓW W ARKUSZU EXCEL

Aby łatwiej dostrzegać własności ciągów, warto je wykreślać w układzie współrzędnych.

Metodę tworzenia wykresu ciągu w Excelu prezentują kolejne slajdy.

Wybieramy narzędzie ***Kreator wykresów***, następnie wykres ***XY Punktowy***

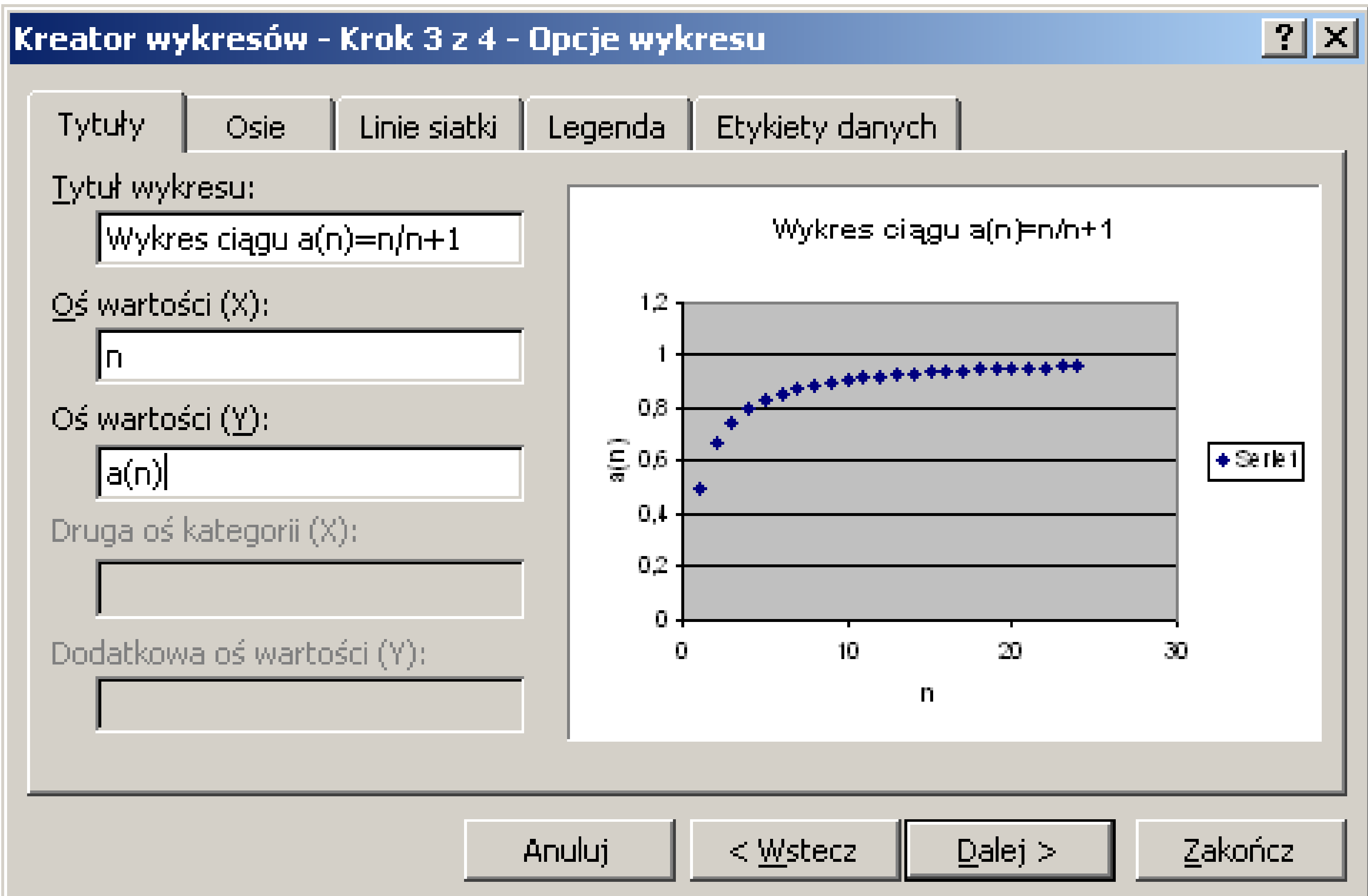


Wybieramy obszar arkusza zawierający kolumnę ***A*** o wartościach „***n***”

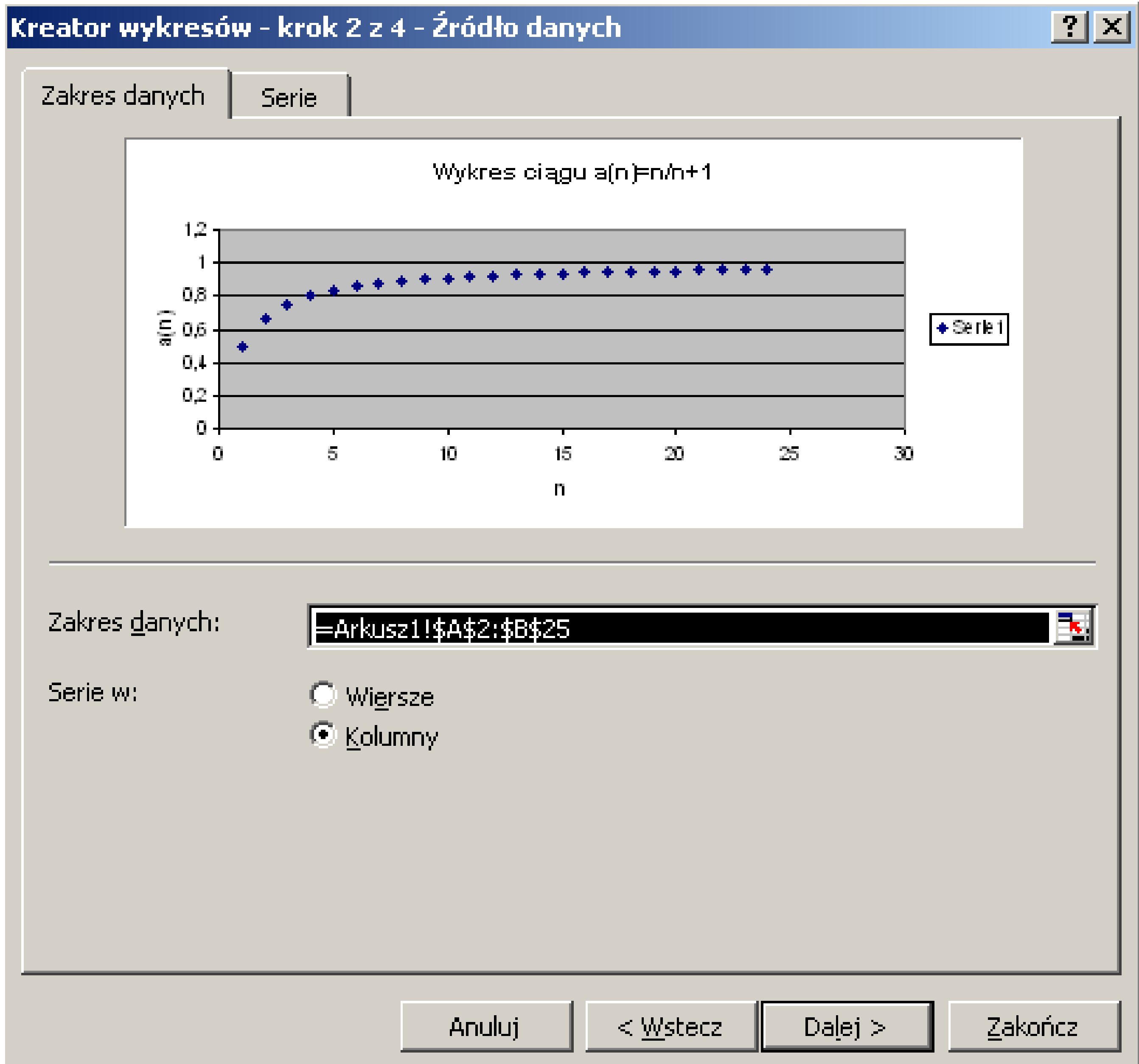
i kolumnę ***B*** o wartościach ciągu „***a(n)”***

	A	B
1	*n*	*n/(n+1)*
2	1	0,5
3	2	0,6666667
4	3	0,75
5	4	0,8
6	5	0,8333333
7	6	0,8571429
8	7	0,875
9	8	0,8888889
10	9	0,9
11	10	0,9090909
12	11	0,9166667
13	12	0,9230769
14	13	0,9285714
15	14	0,9333333
16	15	0,9375
17	16	0,9411765
18	17	0,9444444
19	18	0,9473684
20	19	0,95
21	20	0,952381
22	21	0,9545455
23	22	0,9565217
24	23	0,9583333
25	24	0,96

Nadajemy tytuł wykresu i opisujemy osie układu tak, jak na poniższym przykładzie

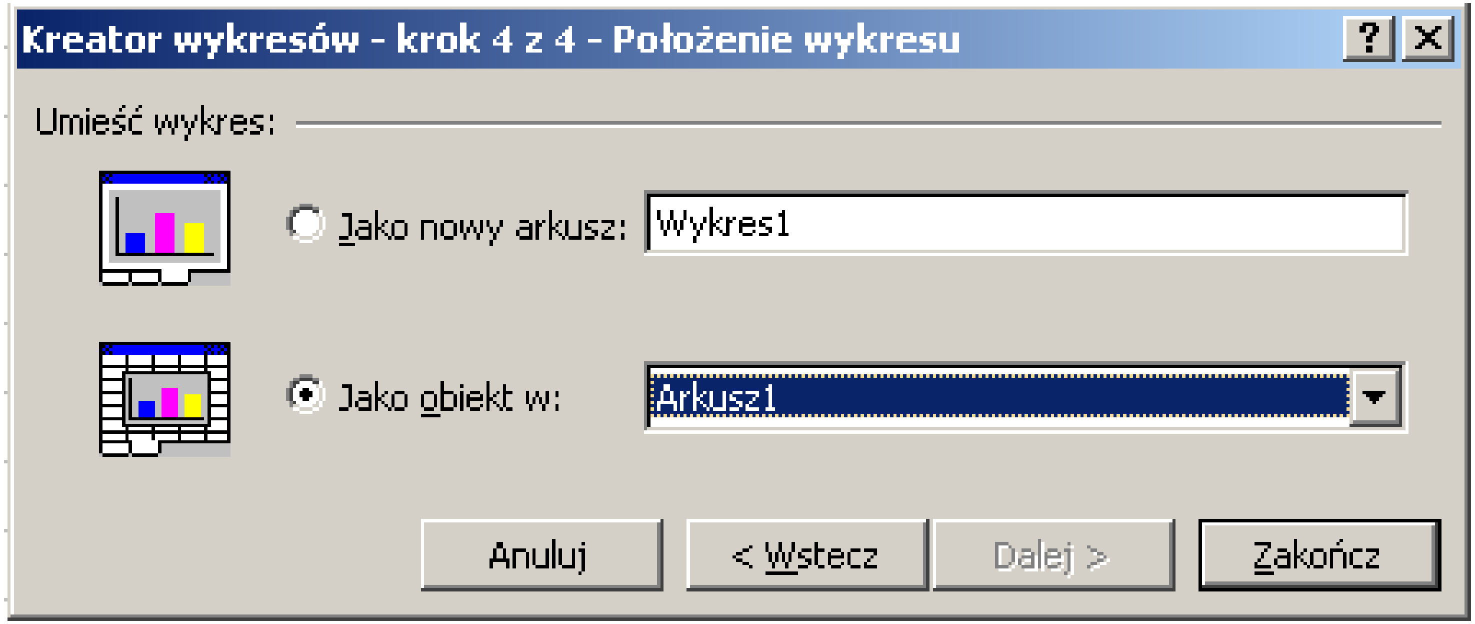


Kreator tworzy wstępny wykres.



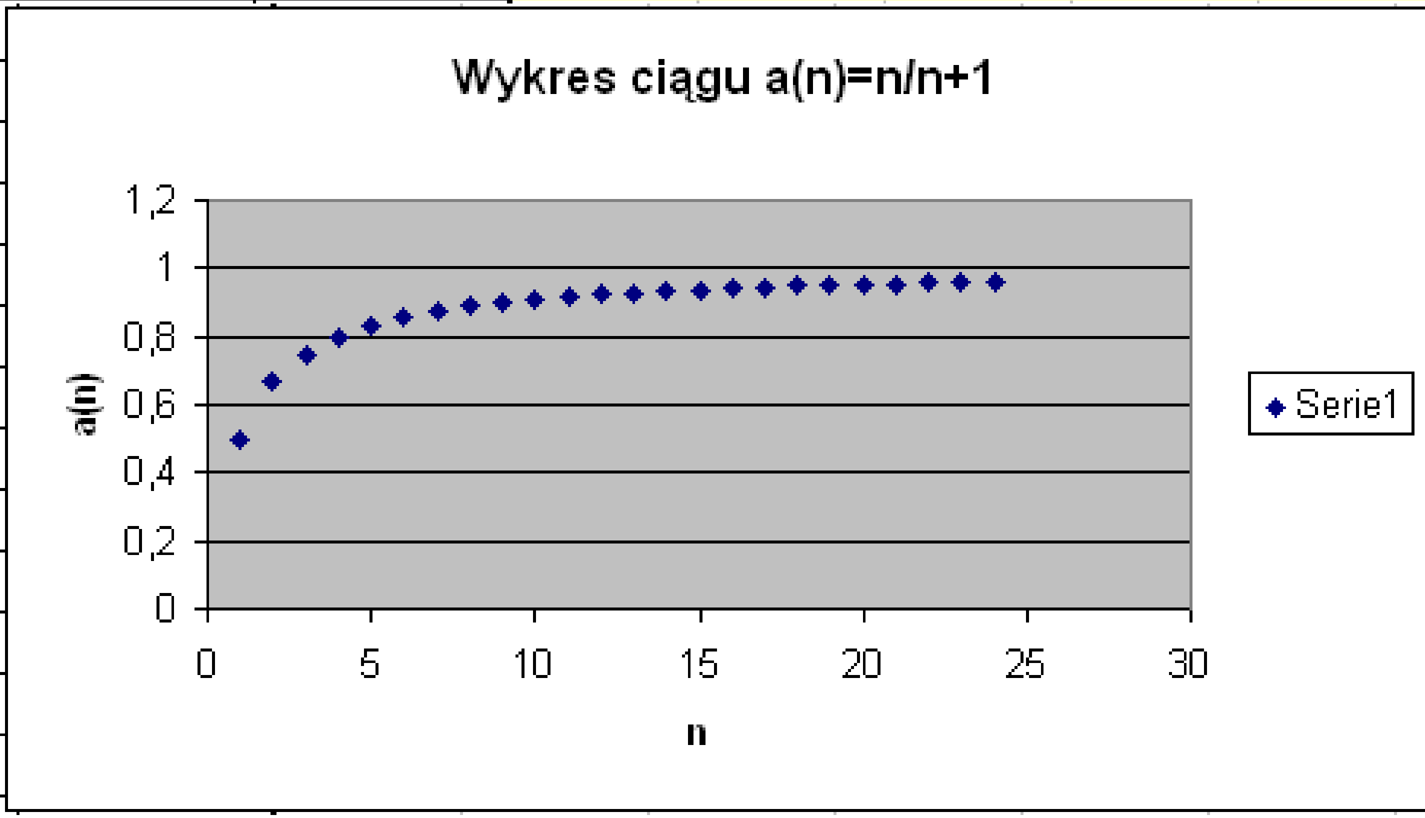
Jeśli chcemy, aby wykres pojawił się obok arkusza, wybieramy opcję „***Jako obiekt w:***”

i wciskamy przycisk „Zakończ”.



Oto wykres wraz z arkuszem

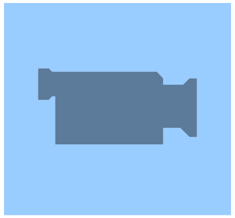
n	n/(n+1)
1	0,5
2	0,6666667
3	0,75
4	0,8
5	0,8333333
6	0,8571429
7	0,875
8	0,8888889
9	0,9
10	0,9090909
11	0,9166667
12	0,9230769
13	0,9285714



PREZENTACJA CIĄGÓW W PROGRAMIE GEOGEBRA

Możliwości prezentacji graficznej ciągów liczbowych ma również program Geogebra.
Dzięki wbudowanym w program poleceniom i skryptom, Geogebra pozwala także badać ciągi i ich własności.

Poniższy film pokazuje, jak stworzyć dynamiczny wykres ciągu w programie Geogebra.



Zbadajmy przy pomocy programu Geogebra własności ciągu liczbowego, który powstaje w następujący sposób:

Pierwszym wyrazem tego ciągu jest dowolna trzycyfrowa liczba naturalna. Tworzymy sumę trzecich potęg cyfr tej liczby i wynik tej sumy przyjmuję jako drugi wyraz ciągu. Trzeci wyraz powstaje w ten sam sposób z drugiego. Powtarzam te czynność w nieskończoność.

Dla przykładu wybierzmy liczbę $a_1 = 351$.

Suma trzecich potęg jej cyfr to wyraz drugi: $a_2 = 3^3 + 5^3 + 1^3 = 135$

Trzeci wyraz wynosi: $a_3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 = 135$

Okazuje się, że tworząc kolejne wyrazy tego ciągu nigdy nie użyjemy innych cyfr oprócz 1, 3 i 5 i od pewnego momentu zacznie się powtarzać ta sama liczba (w tym przypadku jest nią ***135***).

Nasuwa się pytanie, czy to jedyna trzycyfrowa liczba posiadająca tę własność? Przygotujemy program Geogebra, aby „wychwycił” wszystkie trzycyfrowe liczby, które spełniają tę własność.

Wystarczy wprowadzić suwak ***A*** w zakresie od 100 do 999 (gdyż liczby mają być trzycyfrowe).

Wyróżnijmy w zapisie tej liczby cyfry setek ***s***, dziesiątek ***d*** i jedności ***j***.

Gdy liczba wynosi np. ***356***, to jej cyfra setek wynosi ***3***, dziesiątek ***5*** i jedności ***6***. Jak oddzielić te cyfry od siebie?

Cyfrę setek otrzymamy obliczając resztę z dzielenia liczby ***356*** przez ***100***.

Funkcją, taka nazywała się w Excelu „***Zaokr.do.Całk***", teraz w Geogebrze nazywa się „***floor***" .

Tak więc reguła, którą się tu posłużymy brzmi:

s= floor(A/100)

Aby podobnie wyznaczyć cyfrę ***d*** dziesiątek, musimy najpierw od liczby 356 odjąć 300 (czyli 3·100) i z liczby 56 wyznaczyć tak, jak poprzednio cyfrę dziesiątek. Podzielimy ja tym razem przez 10.

Tak więc reguła, którą się tu posłużymy brzmi:

$$d = floor((A-100\cdot s)/10)$$

Cyfrę jedności otrzymamy odejmując od 356 liczby 300 i 50. Zatem reguła wyznaczenia tej cyfry ma postać:

$$j = A - 100*s - 10*d$$

Zatem wprowadzamy trzy zmienne:

s= floor(A/100) – część całkowita ilorazu A/100 - otrzymamy cyfrę setek

d=floor((A-100*s)) / 10 – podobnie otrzymamy cyfrę dziesiątek,

j= A -100*s – 10*d - czyli od liczby odejmujemy wszystkie setki i dziesiątki – otrzymamy cyfrę jedności.

Program Geogebra już zna wartości trzech zmiennych:

s, ***d***, ***j***

Obliczamy sumę ***W*** sześcianów cyfr liczby ***A***:

W=s^3+d^3+j^3

Wprowadzamy tekst o zmiennej ***A*** ale przypisujemy mu Warunek wyświetlania ***A***, wpisując

$$A \stackrel{?}{=} W$$

Dzięki temu zabiegowi program wyświetli tylko te liczby ***A***, których suma sześcianów cyfr jest równa tej liczbie.

Włączamy animację suwaka ***A*** z prędkością ok. 0.3 i w ten sposób wyszukujemy liczby spełniające warunek zadania.

Oto animacja ilustrująca działanie programu:

Która z liczb trzycyfrowych ma tę własność, że suma sześcianów jest cyfr jest równa tej liczbie?

A = 100

Wypisz wszystkie liczby spełniające warunki zadania.

CIĄG ARYTMETYCZNY

Wróćmy do ciągu e_n przedstawionego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

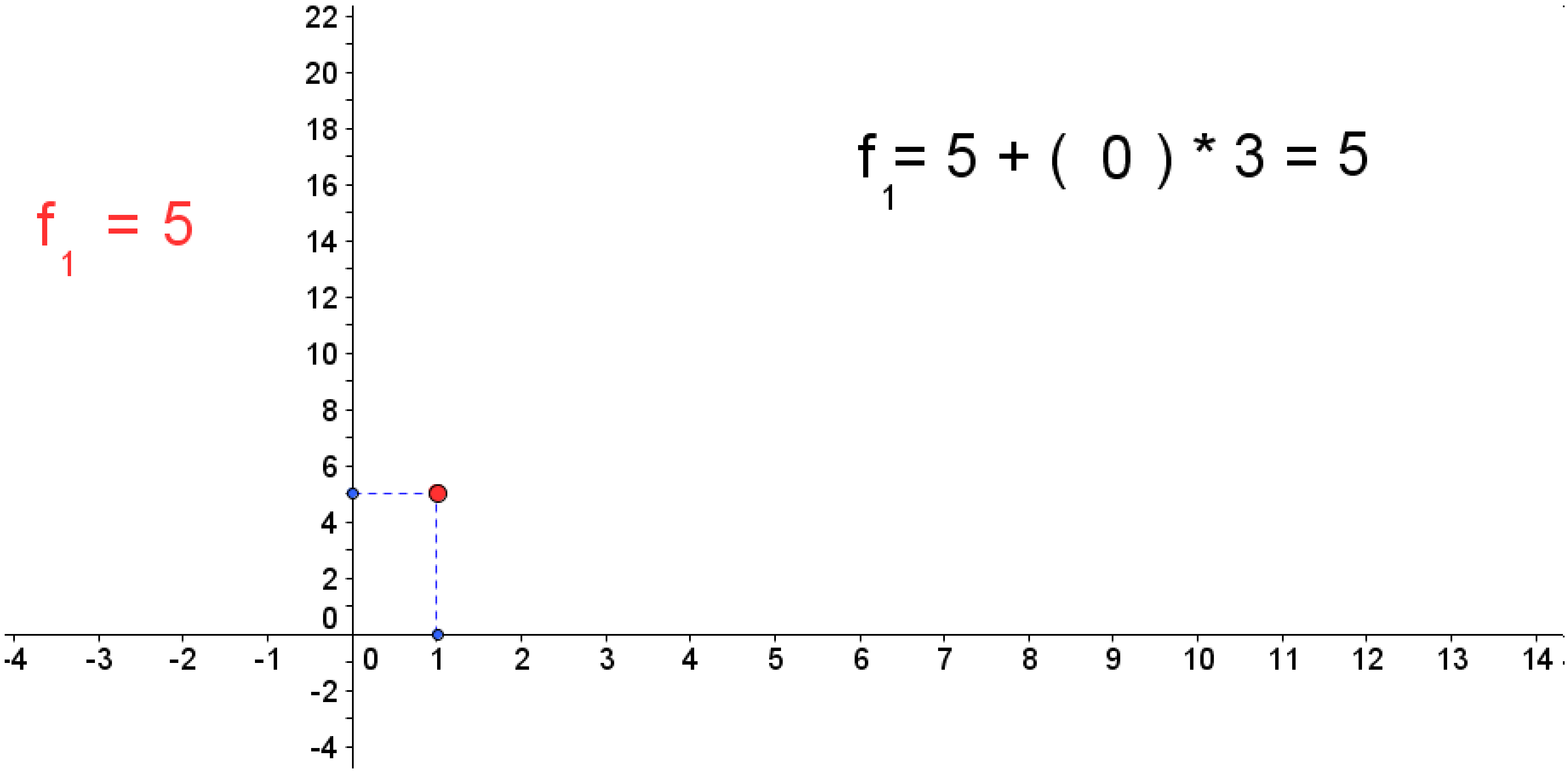
Jak pamiętasz, wyrazy tego ciągu można było opisać również wzorem:

$$e_n = 5 + (n-1) \cdot 3$$

Przypomnijmy również wykres tego ciągu:

$f_1 = 5$

$f_1 = 5 + (0) * 3 = 5$



Zwróć uwagę, że każdy wyraz w tym ciągu jest większy od poprzedniego o tę samą wartość 3.
Można też powiedzieć, że różnica między dowolny wyrazem tego ciągu a wyrazem bezpośrednio go poprzedzającym jest stała. Nazwijmy ją ***różnicą*** i oznaczmy symbolem ***r***.

Wówczas:

$$\bigwedge_{n \in N} a_{n+1} - a_n = r$$

Popatrzmy, jak to objawia się geometrycznie na wykresie ciągu arytmetycznego i co z tego wynika.

Czy jest możliwe szybkie obliczenie dowolnego, np. 47-ego wyrazu tego ciągu? Aby odpowiedzieć na to pytanie, uruchom animację na kolejnym slajdzie.

Jak się przekonałeś, oglądając ostatnią animację, można wyznaczyć każdy wyraz ciągu arytmetycznego, gdy znamy wyraz pierwszy i różnicę tego ciągu..

Tak więc wzór na ***n***-ty wyraz ciągu arytmetycznego przyjmuje postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

Gdy różnica ciągu arytmetycznego jest równa zero, wówczas wszystkie wyrazy ciągu mają tę samą wartość. O takim ciągu powiemy, że jest stały. Nie wzrasta on ani nie maleje.

Ciąg arytmetyczny może być również malejący. Przykładowo: ciąg:

102, 87, 72, 57, ……

Wyznacz różnicę tego ciągu.
Napisz wzór na dowolny *n*-ty wyraz tego ciągu.
Oblicz piąty i kilka następnych po nim wyrazów tego ciągu.
Czy któryś w wyrazów tego ciągu przyjmuje wartość zero?

Potrafisz już wyznaczyć dowolny wyraz ciągu arytmetycznego.

Teraz zajmiemy się wyznaczeniem ***sumy n***-wyrazów ciągu arytmetycznego.

W jednej z niemieckich szkół ok. 1788 r miało miejsce następujące wydarzenie:

Uczniowie klasy, do której uczęszczał 11 –letni Karol Gauss otrzymali od nauczyciela matematyki za zadanie wyznaczyć sumę wszystkich liczb od 1 do 100. Jakież było zdziwienie nauczyciela, gdy Karolek podał po kilku minutach rozwiązanie na tabliczce, która kiedyś zastępowała obecne zeszyty uczniowskie.

Oto jak ten problem rozwiązał Karol Gauss – potem słynny matematyk, zwany „księciem matematyków”.

Karol Gaus (1777-1855) wypisał poszukiwaną sumę dwukrotnie – raz od 1do 100, a drugi raz od 100 do 1,

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1$$

a następnie dodał te sumy stronami do siebie:

$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots + 101 + 101 + 101$$

Składników o wartości ***101*** jest dokładnie ***100***.

Zatem $2S = 100 \cdot 101$

Stąd poszukiwana suma ***S*** wynosi 5050

Następny slajd ilustruje odkrycie wzoru na sumę **n** wyrazów ciągu arytmetycznego, którego Karolek wówczas nie znał.

Naszym zadaniem jest wyznaczenie sumy S_n n - kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego

CIĄG GEOMETRYCZNY

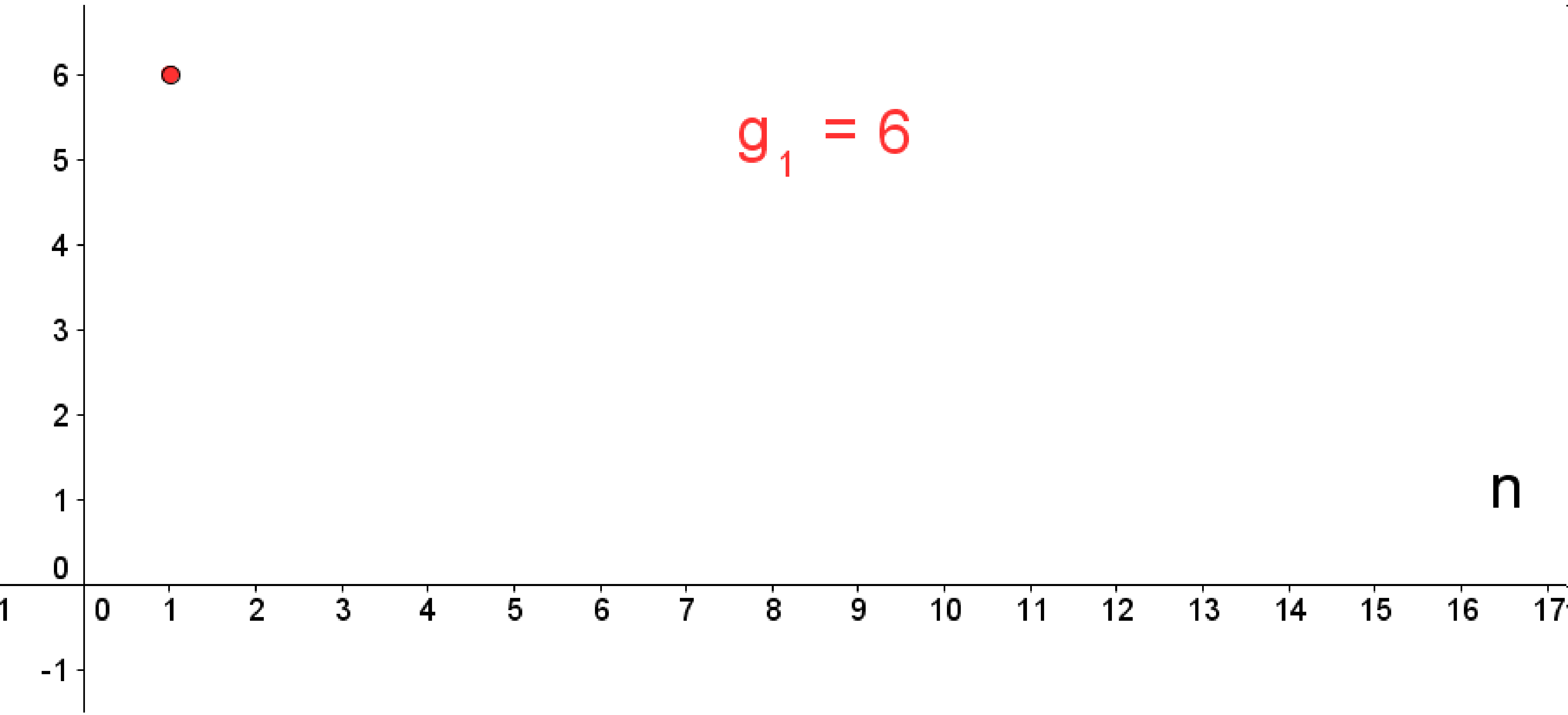
Utwórzmy ciąg opisany wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2} \cdot a_n \end{cases}$

Sprawdź, czy program Geogebra prawidłowo wypisuje jego kolejne wyrazy

$n = 1 \qquad g_1 = 6$

Co powiesz o ilorazie dowolnego wyrazu tego ciągu (bez pierwszego) przez wyraz bezpośrednio go poprzedzający. Wyznacz ten iloraz.

Obejrzyj wykres tego ciągu w układzie współrzędnych:



Jak zauważyłeś, każdy wyraz tego ciągu powstaje z poprzedniego przez pomnożenie go przez liczbę ½.

Zatem stosunek dowolnego wyrazu tego ciągu (z wyjątkiem ***a_1***) do bezpośrednio go poprzedzającego jest stały i wynosi 2.

Taki ciąg nazywać będziemy ciągiem geometrycznym.

Zatem:

Ciąg jest geometryczny $\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N-1} \frac{a_n}{a_{n-1}} = const = q$

Stosunek ten nazywamy ***ilorazem*** ciągu geometrycznego i oznaczamy symbolem ***q***.

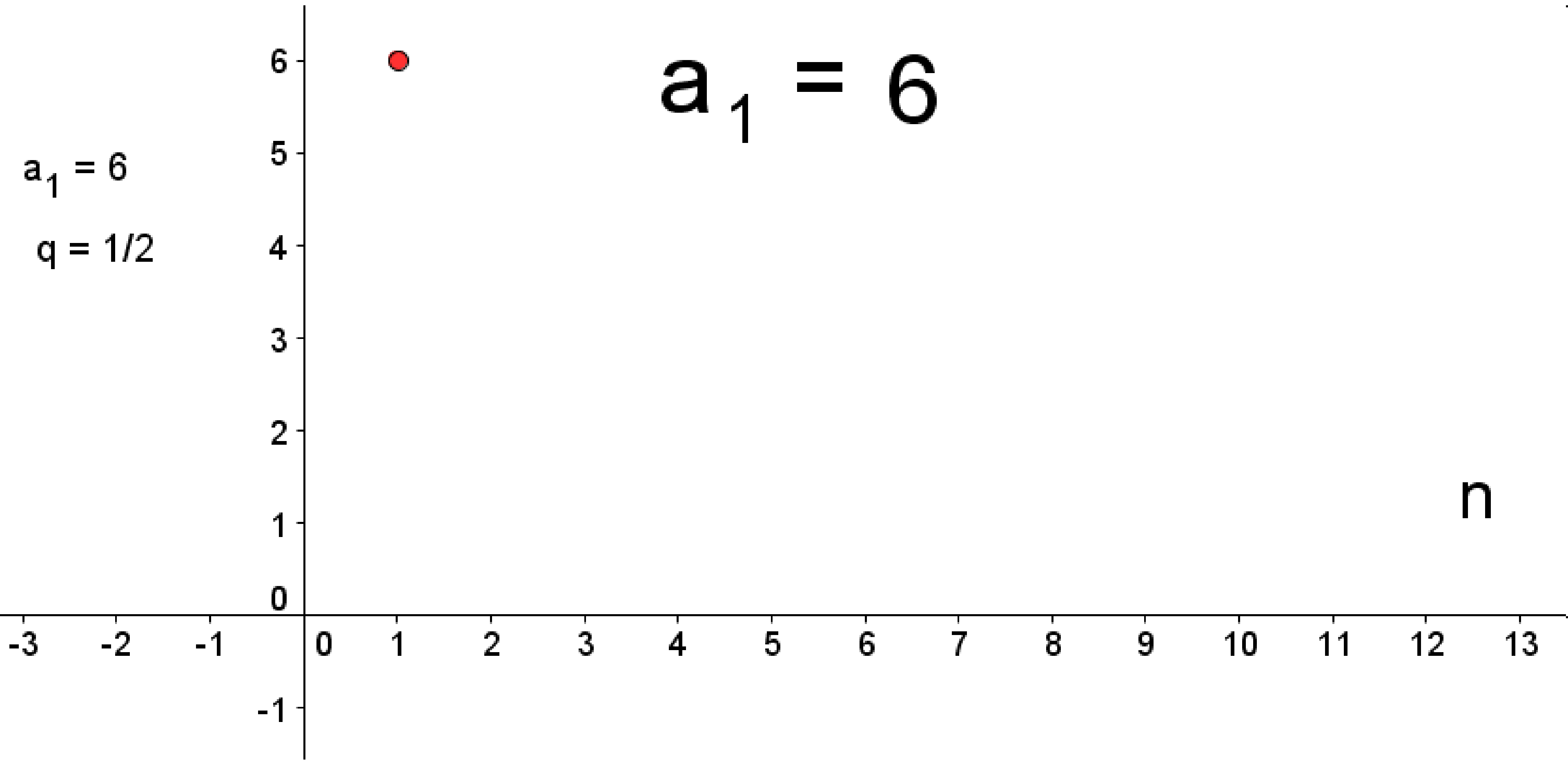
Ciąg geometryczny w zakresie monotoniczności nie spełnia takich warunków jak ciąg arytmetyczny.

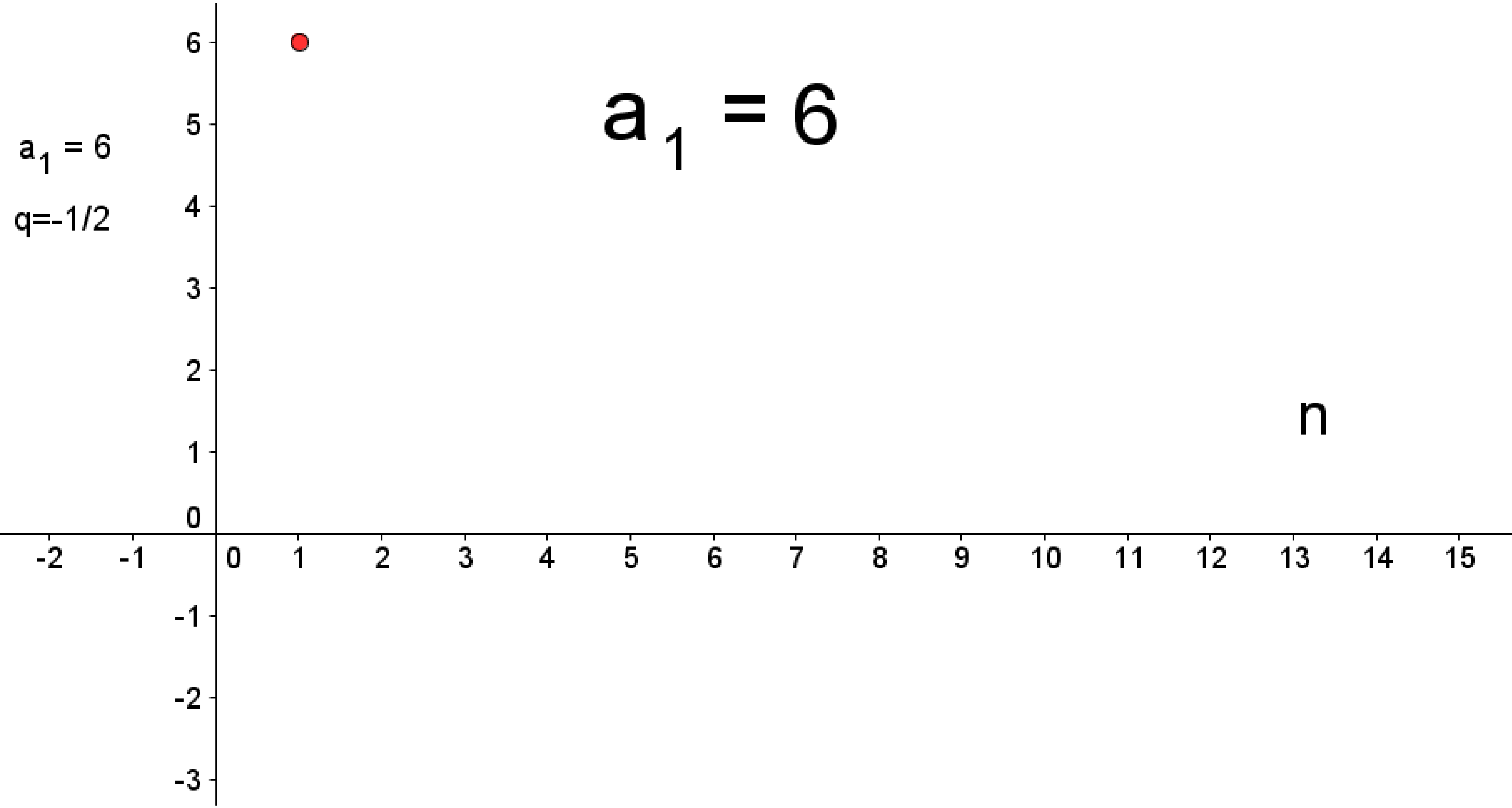
Iloraz q nie wpływa bezpośrednio na rodzaj monotoniczności ciągu geometrycznego.

Uczestniczy w tym również wyraz pierwszy a_1 ciągu.

Obserwując poniższe animacje, zbadaj, jak zachowuje się monotoniczność ciągu w zależności od parametrów a_1 i q.

Notuj wartości a i q oraz rodzaj monotoniczności ciągów


$a_1 = 6$
$a_1 = 6$
$q = 1/2$
n
6
5
4
3
2
1
0
-1
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

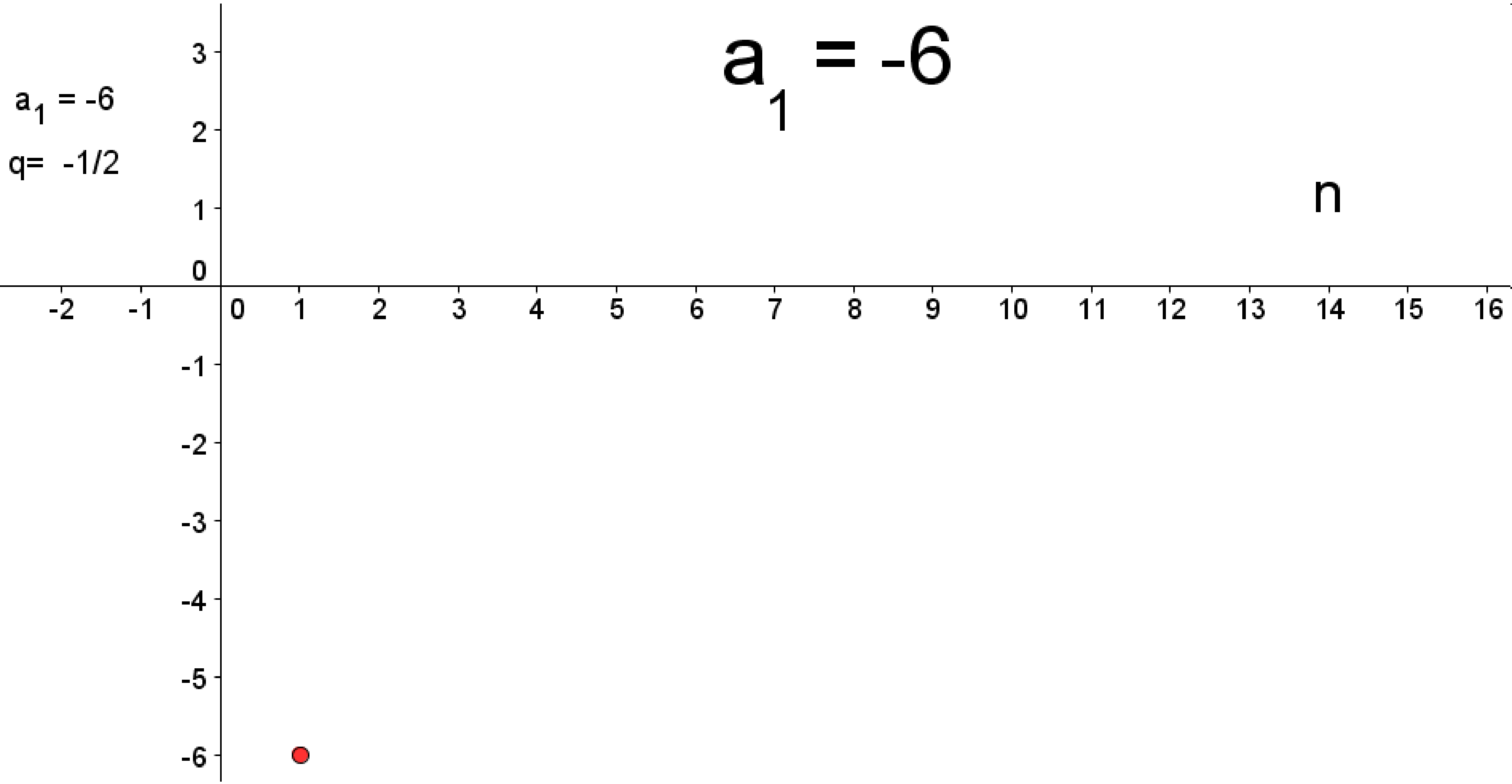


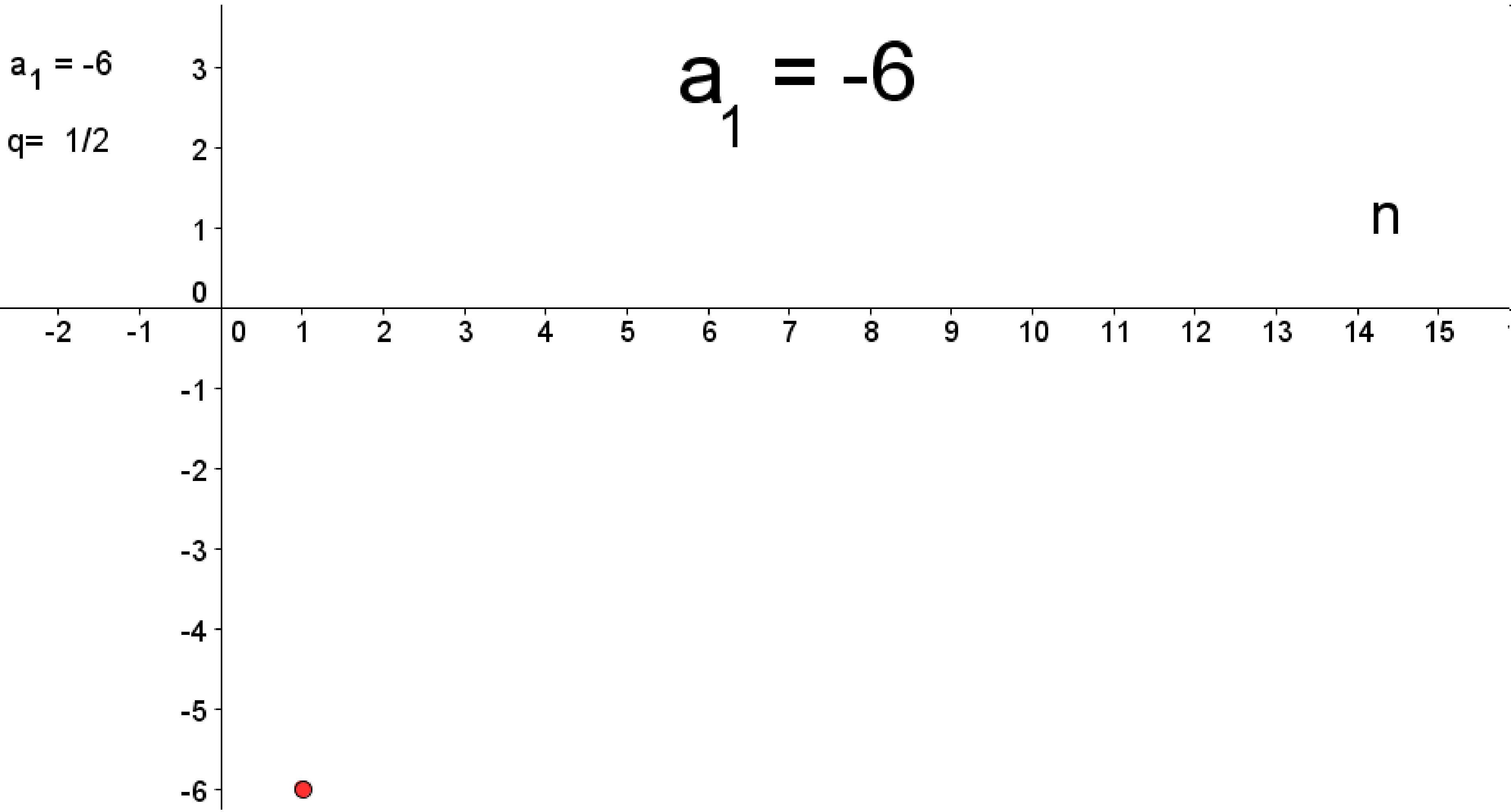
$a_1 = 6$
$a_1 = 6$
q=-1/2
n

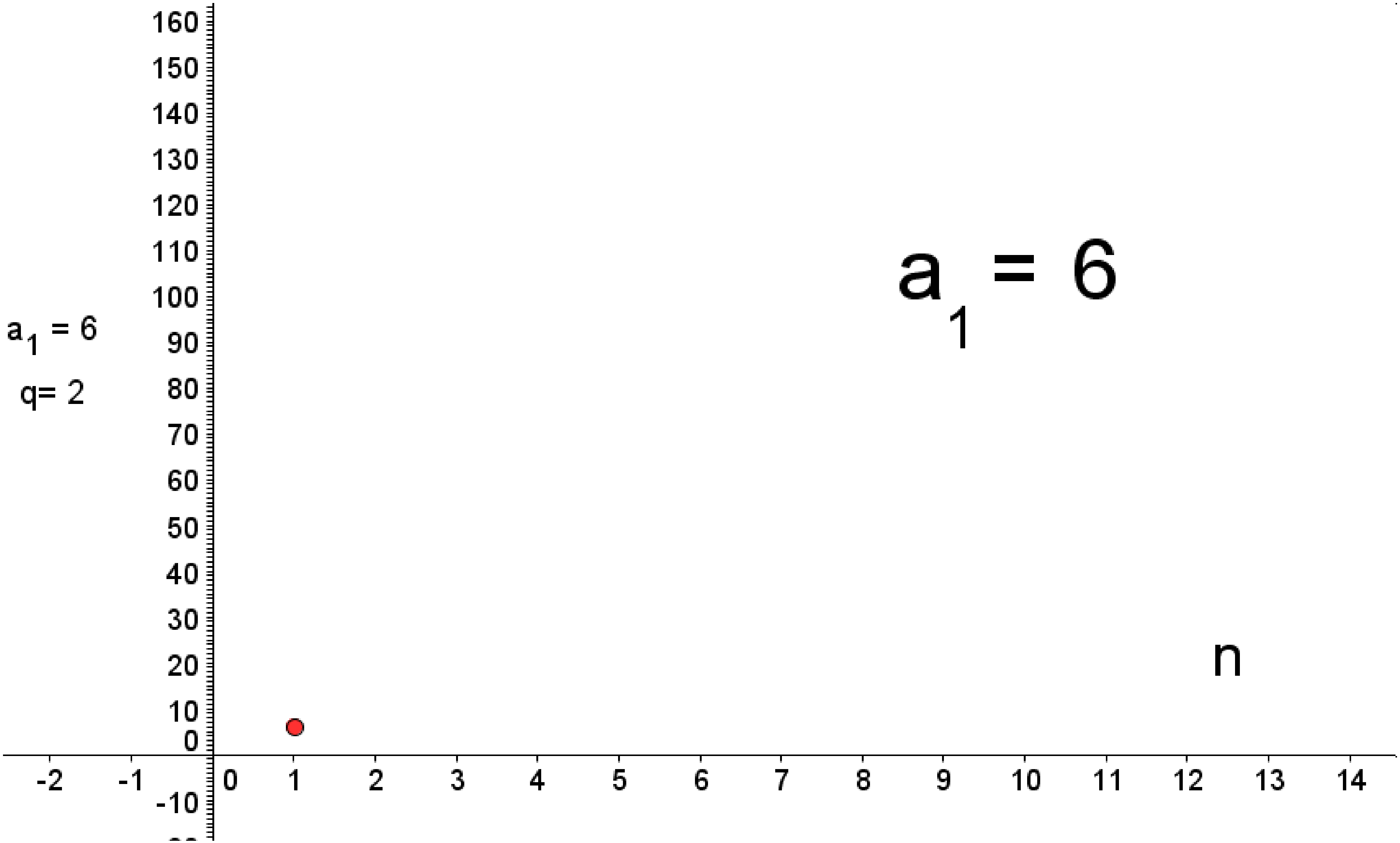
$a_1 = -6$

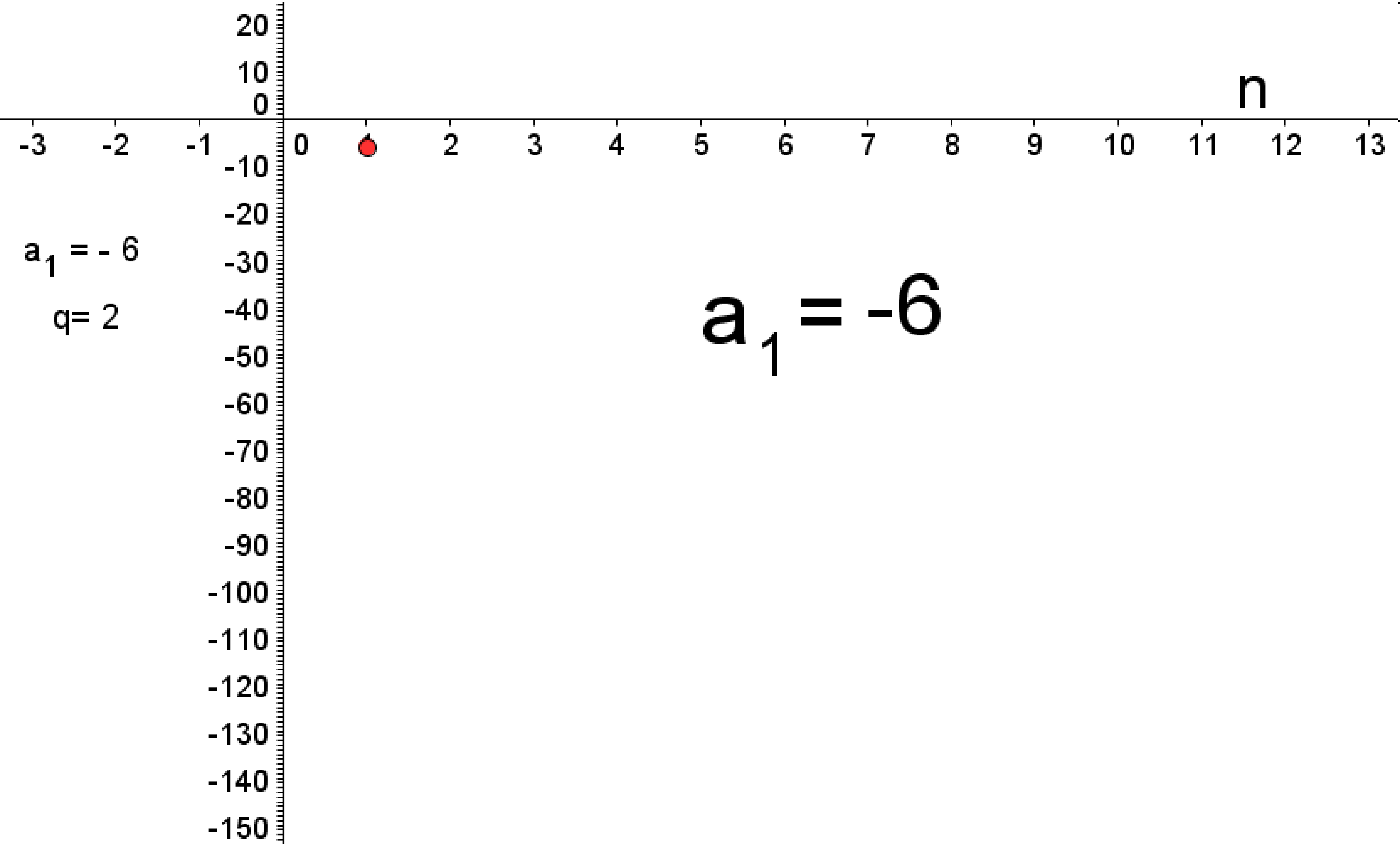
$q = -1/2$

$$a_1 = -6$$




$a_1 = -6$
$q = 1/2$
$a_1 = -6$
n
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6


$a_1 = 6$
q= 2
$a_1 = 6$
n


20
10
0
n
-3
-2
-1
0
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
-110
-120
-130
-140
-150
a_1 = - 6
q= 2

$$a_1 = -6$$

Na podstawie obserwacji wyników eksperymentu wpisz poniższą tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

		Ciąg jest /rosnący, malejący, przemienny, stały/
$a_1 > 0$	$0 < q < 1$	
$a_1 > 0$	$1 > q$	
$a_1 > 0$	$q < 0$	
$a_1 < 0$	$q < 0$	
$a_1 < 0$	$0 < q < 1$	
$a_1 < 0$	$1 > q$	
$a_1 > 0$	$0 < q < 1$	
$a_1 \neq 0$	$q = 1$	

Kolejnym zadaniem jest wyznaczenie wzoru na dowolny ***n***-ty wyraz ciągu geometrycznego.

Popatrz na animację umieszczoną na kolejnym slajdzie.

Jak widać, dowolny wyraz ciągu geometrycznego zależy od wyrazu pierwszego $\boldsymbol{a_1}$, oraz ilorazu $\boldsymbol{q}$.

Wzór na ***n***-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Podobnie, jak dla sumy ciągu arytmetycznego, również dla ciągu geometrycznego można obliczyć sumę ***n*** jego kolejnych wyrazów.

Suma ***n*** pierwszych kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dowód tego wzoru nie jest zbyt skomplikowany.

Suma S_n jest równa:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots a_1 q^{n-1} = a_1\left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}\right)$$

Z kursy algebry wiadomo, że dla każdych dwóch liczb ***a*∈*R*** i ***b*∈*R*** oraz ***n*∈*N***, zachodzi równość:

$$\left(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right)\cdot(a-b) = a^n - b^n$$

Podstawiając: ***a*** = ***q*** oraz ***b*** = **1**, otrzymamy:

$$\left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}\right)(1-q) = 1 - q^n$$

Stąd :

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

ĆWICZENIA

Oto najczęstsze zadania, związane z ciągiem arytmetycznym:

ĆWICZENIE 1

Wyznaczyć ciąg arytmetyczny, jeśli jego siódmy wyraz ma wartość 7, a jedenasty 19.

Rozwiązanie:

Wyznaczyć ciąg, to oznacza wyznaczyć jego wyraz pierwszy a_1 oraz różnicę r.

W tym zadaniu wiemy, że $a_7 = 7$ oraz $a_{11} = 19$.

Ale zgodnie z poznanym wzorem: $a_n = a_1 + (n-1)r$

Otrzymamy układ równań o niewiadomych a_1, r :

$$\begin{cases} 7 = a_1 + 6r \\ 19 = a_1 + 10r \end{cases}$$

Rozwiązując go otrzymamy: …………..***wpisz tu prawidłowe wartości*** a_1 ***oraz*** r.

ĆWICZENIE 2

Wyznacz sumę dwunastu wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym znamy a_1=-2 oraz różnicę r = -5.

Rozwiązanie:

Widać, że skoro pierwszy wyraz jest ujemny i różnica ciągu jest ujemna, to też ciąg jest malejący i jego wszystkie wyrazy są ujemne, Stąd suma tego ciągu powinna być też ujemna.

Najpierw wyznacz wyraz dwunasty:

a_{12} = ……………….

Stąd suma dwunastu wyrazów tego ciągu wynosi S_{12} = …………..

ĆWICZENIE 3

$n = 1$

Obejrzyj 10 pierwszych wyrazów ciągu i na tej podstawie podaj wzór ogólny tego ciągu.

$$n = 1 \qquad a_1 = 2$$

ĆWICZENIE 4

n = 1

Obejrzyj 10 pierwszych wyrazów ciągu i na tej podstawie podaj wzór ogólny tego ciągu.

$$n = 1 \qquad a_1 = 2$$

ĆWICZENIE 5

Wiadomo, że suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu (a_n) wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{4^n - 1}{3}$$

Wyznacz wzór tego ciągu.

Czy jest on arytmetyczny czy geometryczny?

<u>Rozwiązanie:</u>

Widać, że $S_1 = 1$, $S_2 = 5$, $S_3 = 21$. Ale S_1 to pierwszy wyraz ciągu, więc $a_1 = 1$. Wyraz drugi to różnica między S_2 i a_1, więc $a_2 = 5 – 1 = 4$.

Podobnie $a_3 = S_3 – a_2 – a_1 = 21 – 4 – 1 = 16$.

Ciąg 1, 4, 16 to ciąg geometryczny.

ĆWICZENIE 6

Podaj następne wyrazy ciągu $(a_{n)}$: 5, 9, 17, 33, 65, 129, i określ jego wzór.

W sytuacji, gdy nie mamy więcej informacji o wyrazach ciągu, tworzymy ciąg jego różnic. Jeśli ciąg ten jest stały, to możemy odtworzyć kolejne wyrazy.. Jeśli ciąg ten nie jest ciągły, tworzymy kolejny ciąg jego różnic, aż do skutku.
Ciąg różnic naszego ciągu to ciąg: 4, 8, 16, 32, 64, czyli ciąg geometryczny. **Możesz teraz z łatwością odtworzyć kolejne wyrazy ciągu (a_n): ………….**

ĆWICZENIE 7

Uzupełnij brakujące liczby w poniższym ciągu:

102, 105, 111, 114, 120, 123, 129,___, ___, ___...

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ